Universidad de Cádiz

NOTAS Y APUNTES DE TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA Y ASTRONOMÍA DE POSICIÓN

Laboratorio de Astronomía y Geodesia. Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias

Manuel Berrocoso. María Eva Ramírez. José Manuel Enríquez-Salamanca. Alejandro Pérez-Peña.

Puerto Real, Mayo-2003

Índice

PRÓLOGO

Este texto está dirigido a alumnos de un primer ciclo de la Licenciaturas de Matemáticas, aunque con las debidas consideraciones también puede utilizarse como texto complementario para aquellos cursos relacionados con la Trigonometría Esférica o la Astronomía de Posición que puedan impartirse en otras disciplinas, por ejemplo, las licenciaturas de Física, de Náutica, de Ciencias del Mar, o la Ingeniería Superior en Cartografía y Geodesia.

La orientación académica de estas notas y apuntes pretenden ser un complemento importante tanto para el alumno como para el profesor que facilite tareas cotidianas que tienen lugar en el hecho docente. La disponibilidad de este manual supondrá tener un soporte físico adecuado que permita evitar en lo posible la tarea de "tomar apuntes", a todas luces contraproducente no sólo por lo tediosa que por lo general resulta sino además por la disminución de la atención que provoca en los alumnos, sobre todo en alumnos de primer ciclo. Como es obvio, en ningún caso se pretende sustituir a otros textos excelentes que existen sobre las temáticas tratadas.

En el texto se han diferenciado dos partes; por un lado la Trigonometría Esférica y por otro la Astronomía de Posición. Si bien es cierto que en un principio nuestra intención era incluir sucintamente los contenidos trigonométricos y que sirvieran de apoyo exclusivamente a la Astronomía, se decidió, a la vista del escaso o nulo conocimiento que los alumnos tenían de esta parte de la Geometría, incluir dichos contenidos como una parte claramente diferencia y por tanto más extensa que lo inicialmente previsto. En esta parte se muestran aplicaciones de la Trigonometría Esférica a la Navegación y a problemas geométricos, dejando para la segunda parte una aplicación más específica a problemas astronómicos.

La orientación matemática del texto se manifiesta en la utilización con profusión del lenguaje matemático basándose en identificar y usar la nomenclatura apropiada, en enunciar, definir y describir con claridad las propiedades, conceptos y procesos; e interpretar enunciados, propiedades y procesos. Otro aspecto importante que se ha considerado en este planteamiento de la Astronomía de Posición es

la potenciación de la capacidad para resolver problemas matemáticos, concretamente aquellos en los que la visión geométrica espacial es fundamental y para los cuales esta disciplina es sumamente útil y apropiada. Por último se ha hecho especial énfasis en los procesos y procedimientos de modelización matemática y conceptualización de fenómenos y situaciones procedentes del mundo físico.

Con estos objetivos, en el texto y al final de cada capítulo se incluye una colección de problemas muchos de ellos seleccionados de los textos recomendados en la bibliografía.

I. Trigonometría Esférica

La representación esférica del Universo es una idea intuitiva que surge de forma natural sin más que mirar en una noche clara el cielo estrellado que nos circunda. Fácilmente observamos que la parte de cielo que vemos se asemeja a un hemisferio de una esfera cuyo centro está situado en el lugar en que nos encontramos, de tal forma que los cuerpos celestes observados podrían considerarse situados en una superficie esférica. Así pues, cualquier estudio acerca de los astros del Universo necesitará del conocimiento y manejo de conceptos relativos a la geometría de la esfera.

Análogamente sucede cuando consideramos la superficie de la Tierra como una esfera. Aunque este planteamiento se utiliza sobre todo en Navegación y en proyecciones topográficas e hidrográficas, en Geodesia sólo será válido como una primera aproximación.

De este modo, la geometría de la esfera y más concretamente, la Trigonometría Esférica, es una herramienta fundamental en el estudio de la Astronomía de Posición y sus aplicaciones astrométricas, y en otras disciplinas pertenecientes a las Ciencias de la Tierra y del Espacio.

La Trigonometría Esférica trata del establecimiento de las propiedades y relaciones que satisfacen los elementos de triángulos definidos en la superficie de una esfera mediante arcos de círculos máximos, así como de la resolución de los mismos. Los triángulos así definidos se denominan triángulos esféricos y son las figuras geométricas básicas de la Trigonometría Esférica.

En esta parte se desarrollan los conceptos de la Trigonometría Esférica, las expresiones que ligan los elementos de los triángulos esféricos y las técnicas concernientes a la resolución de este tipo de triángulos.

El concepto de triángulo esférico se introduce a partir de la definición del triedro, en tanto que geométricamente se obtendrá como la intersección de un triedro con la superficie de una esfera cuyo centro coincide con el vértice del triedro. Esta definición de triángulo esférico nos conducirá a establecer una correspondencia biunívoca entre los elementos de un triedro y los del triángulo esférico definido a partir de él, surgiendo de este modo la necesidad de efectuar un estudio previo sobre los triedros y sus propiedades.

En este sentido, en la sección 1.1 del capítulo 1, se establecen las definiciones de triedro y sus elementos y de triedros polares. Este último concepto se obtiene a partir de la suplementariedad entre el ángulo determinado por un diedro y el determinado por las semirrectas perpendiculares a las caras de dicho diedro, definiéndose como aquel cuyas caras son suplementarias a los diedros respectivos del triedro dado.

Entre las propiedades relativas a la métrica de las caras y los diedros de un triedro destacamos que cualquiera de sus caras es menor que la suma de las otras dos, que la suma de las caras es menor que cuatro rectos, que la suma de los diedros está comprendida entre dos y seis rectos y que el menor de los diedros difiere de la suma de los otros dos en menos de dos rectos.

Por último, se define la igualdad de triedros y se proporcionan condiciones suficientes, denominadas criterios de igualdad, que restringen la definición de igualdad de triedros.

La sección 1.2 comienza con las definiciones de los conceptos básicos de la geometría de la esfera: circunferencias máximas y menores y arcos de éstas. También se definen los polos de circunferencias máximas, distancia esférica, husos o ángulos esféricos, distancia de un punto a una circunferencia máxima, mediatriz esférica, bisectriz esférica, polos de una circunferencia menor y circunferencia tangente a ésta, y finalmente se expresa la definición, mencionada anteriormente en esta introducción, de triángulo esférico y sus elementos.

Como se puede ver en la sección 1.3, las propiedades de los triángulos esféricos se deducen de su propia definición, de tal forma que a cada propiedad relativa a los triedros le corresponde una propiedad análoga de los triángulos esféricos, sin más que sustituir las caras y diedros del triedro por los lados y los ángulos del triángulo, respectivamente.

Si consideramos la intersección de dos triedros polares con una esfera cuyo centro sea el vértice polar surge de forma natural el concepto de triángulo polar. Y de igual forma a como sucedía con los triedros, se proporciona la definición y las condiciones suficientes de igualdad de triángulos esféricos y las definiciones de exceso esférico, semiperímetro y defecto esférico.

Finalmente, en la sección 1.4, se realiza un análisis comparativo entre las geometrías de la esfera y del plano, concluyéndose que la geometría esférica es un ejemplo de geometría no euclídea.

En el capítulo 2 se obtendrán las principales expresiones que relacionan entre sí los elementos de un triángulo esférico.

Los teoremas del coseno y del seno y las analogías de Bessel, generalmente conocidos como 1^a, 2^a y 3ª fórmulas de Bessel, son los resultados básicos de la Trigonometría Esférica.

La 1ª fórmula de Bessel relaciona los tres lados y un ángulo proporcionando el lado opuesto al ángulo dado en función de los otros lados y dicho ángulo, la 2ª fórmula de Bessel relaciona dos ángulos y sus lados opuestos, y la 3ª fórmula de Bessel nos relaciona tres lados y dos ángulos. En el resto del capítulo se obtienen, a partir de las fórmulas de Bessel, otras expresiones de gran utilidad en la Trigonometría Esférica.

Así, considerando la 1ª fórmula de Bessel para dos de los lados del triángulo, operando apropiadamente y aplicando la 2ª fórmula de Bessel, se obtiene la fórmula de las Cuatro Partes que relaciona dos lados, el ángulo comprendido y el ángulo opuesto a uno de los lados.

También podemos aplicar la 1^a y 3ª fórmulas de Bessel al triángulo polar, de forma que ahora se obtendrán dos expresiones análogas a éstas que relacionan los tres ángulos y un lado y los tres ángulos y dos lados, respectivamente.

La fórmula de Cagnoli relaciona los tres lados y los tres ángulos del triángulo esférico constituyendo una expresión apropiada para la comprobación de que los los resultados calculados sean o no los correctos.

Las fórmulas de Borda, las analogías de Gauss-Delambre y las analogías de Neper amplían el espectro de las resoluciones de triángulos esféricos. Las fórmulas de Borda proporcionan los valores de los semiángulos y semilados en función de los lados y del semiperímetro y de los ángulos y del

semiexceso esférico, respectivamente. Las analogías de Gauss-Delambre relacionan la semisuma de dos ángulos y la semidiferencia de los dos lados opuestos con el ángulo y lado restantes; participando en ellas los seis elementos del triángulo esférico de tal forma que, al igual que sucedía con la fórmula de Cagnoli, pueden utilizarse como comprobación de los resultados obtenidos mediante otras expresiones. En las analogías de Neper también intervienen la semisuma de dos ángulos y la semidiferencia de los lados opuestos pero, en este caso, o bien aparece el otro ángulo o bien el otro lado. Otra diferencia existente entre ambas analogías radica en que mientras que en las de Bessel intervienen únicamente senos y cosenos de los elementos inmiscuidos, en las de Neper aparecen también tangentes de dichos elementos.

En la sección 2.4 se establecen las expresiones que rigen situaciones diferenciales y que permiten estudiar la influencia que el error existente en un elemento produce en los otros elementos; posibilitando que para cada situación experimental concreta podamos elegir a priori las fórmulas más apropiadas para minimizar la influencia de los errores de los elementos observados.

En el capítulo 3 se afronta el problema de la resolución de triángulos esféricos. Este problema consiste en determinar los elementos desconocidos de un triángulo esférico a partir de los conocidos mediante la utilización de las expresiones obtenidas en el capítulo anterior o combinaciones de éstas.

A este efecto se realiza un proceso inductivo análogo al que, de forma clásica, se sigue en la Trigonometría Plana, constando de las siguientes etapas sucesivas: resolución de triángulos esféricos rectángulos, rectiláteros y oblicuángulos.

Las fórmulas apropiadas para la resolución de triángulos esféricos rectángulos, sección 3.1, se obtienen sustituyendo en las expresiones generales obtenidas en el capítulo 2, los valores correspondientes de las funciones trigonométricas del ángulo recto. Estas fórmulas se sintetizan en la regla mnemotécnica denominada Pentágono de Neper. En ella, los elementos distintos del ángulo recto se sitúan en los vértices de un pentágono según la secuencia: lado opuesto al ángulo recto, ángulo adyacente, complementario del lado no opuesto a este ángulo adyacente, complementario del lado opuesto y el otro ángulo adyacente. Puesto que dados tres elementos distintos puede ocurrir que sean consecutivos o que uno de ellos esté separado de los otros dos, las reglas que resuelven el triángulo rectángulo vienen dadas por: *"El coseno de un elemento cualquiera es igual al producto de los senos de los elementos opuestos"*, y *"El coseno de un elemento cualquiera es igual al producto de las cotangentes de los elementos adyacentes"*.

En la resolución de triángulos esféricos rectángulos y, a fin de discernir el valor de un elemento que viene determinado por la función arcoseno, tendremos en cuenta que el número de lados superiores a un recto es siempre par y que cada cateto y su ángulo opuesto han de ser de la misma especie.

Como en todo triángulo esférico rectángulo el ángulo recto es siempre un elemento conocido a priori, será suficiente que conozcamos dos de los cinco elementos restantes para determinar completamente el triángulo. Las combinaciones esencialmente distintas a que esos elementos darán lugar vienen dadas por el conocimiento de la hipotenusa y un cateto, o los dos catetos, o la hipotenusa y un ángulo oblicuo, o un cateto y el ángulo oblicuo adyacente, o dos ángulos oblicuos, o un cateto y el ángulo oblicuo opuesto.

Cuando nuestros datos son la hipotenusa y un cateto, una condición necesaria y suficiente para la existencia de solución es que el valor de la hipotenusa esté comprendido entre el valor del cateto y

del suplementario de éste. Por otra parte, como el cálculo del ángulo opuesto al cateto dado procede de un arcoseno, existirá una indeterminación en la unicidad de la solución que queda resuelta sin más que aplicar la mencionada condición de igualdad de especie entre dicho ángulo y el cateto dado.

En el caso de que los elementos conocidos sean un cateto y el ángulo oblicuo opuesto, y dado que todos los elementos desconocidos se determinan mediante la función arcoseno, se presentan situaciones en las que no podemos asegurar ni la existencia ni la unicidad de la solución. Existirán una, dos o ninguna solución, según sean los valores relativos entre los elementos conocidos.

En el resto de los casos el problema siempre tiene solución que, además, única. En cualquiera de los casos existen fórmulas que relacionan los elementos desconocidos, que sirven para comprobar los resultados obtenidos.

Para resolver un triángulo esférico rectilátero, sección 3.2, bastará tener en cuenta que su triángulo polar es un triángulo esférico rectángulo, que se resolvería utilizando la metodología desarrollada en la sección anterior. No obstante, también existe una versión del Pentágono de Neper para este caso, pero ahora la secuencia de los elementos del triángulo esférico es: complementario del ángulo opuesto al lado recto, complementario de uno de los lados oblicuos, el suplementario del ángulo no opuesto a este lado con el signo contrario, el suplementario del otro ángulo también con el signo contrario, y el complementario del otro lado no oblicuo. En esta distribución siguen siendo válidas las mismas reglas establecidas para el Pentágono de Neper de los triángulos esféricos rectángulos. Podemos establecer una metodología propia para la resolución de estos triángulos que deberá responder a los casos donde los elementos conocidos pueden ser el ángulo opuesto al lado recto y un ángulo adyacente, o los dos ángulos adyacentes al lado recto, o el ángulo opuesto al lado recto y un lado oblicuo, o un ángulo adyacente al lado recto y el lado oblicuo adyacente a dicho ángulo, o los dos lados oblicuos, o un ángulo adyacente al lado recto y el lado oblicuo opuesto a dicho lado. Las discusiones relativas a cada caso se efectúan de forma análoga a la realizada en la resolución de los triángulos esféricos rectángulos.

La sección 3.3 se ocupa de la resolución de triángulos esféricos oblicuángulos, entendiendo por éstos, aquellos triángulos esféricos que no tienen ningún ángulo recto. Cuando alguno de sus lados sea recto, se resuelve aplicando los métodos explicados en la sección anterior. En general, un triángulo esférico oblicuángulo puede resolverse de forma directa mediante la aplicación de las expresiones obtenidas en el capítulo 2, u otras deducidas a partir de éstas, o también, resolviendo los dos triángulos esféricos rectángulos que se obtienen al trazar desde uno de sus vértices el arco de círculo máximo perpendicular al lado opuesto y denominado perpendículo. Cuando el triángulo oblicuo sea isósceles o si entre los elementos dados existen dos lados o dos ángulos suplementarios no será necesario resolver los dos triángulos obtenidos mediante el perpendículo, bastando con la resolución de uno de ellos. En cualquier caso, para la resolución de un triángulo esférico será suficiente conocer tres de sus elementos pudiendo ocurrir que conozcamos los tres lados, o los tres ángulos, o dos lados y el ángulo comprendido, o un lado y los ángulos adyacentes, o dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, o dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos.

En los dos primeros casos siempre existe una única solución, y se resuelve aplicando las fórmulas de Borda, que para el primer caso, proporcionan la tangente de cada ángulo mitad en función del semiperímetro y los tres lados, y en el segundo caso, la tangente de cada lado mitad en función del semiexceso esférico y los tres ángulos.

Cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido, el problema también tiene una única solución. En este caso, los otros dos ángulos se obtendrán aplicando las Analogías de Neper, que proporcionan la tangente de la semisuma y de la semidiferencia de estos ángulos; obteniéndose un sistema compatible determinado cuyas incógnitas son dichos ángulos. El tercer lado se obtiene aplicando directamente la 1ª fórmula de Bessel.

En el caso de conocer un lado y los ángulos adyacentes el método es idéntico al utilizado en el caso anterior, salvo que ahora, para el cálculo del tercer ángulo, se puede aplicar la Analogía de Neper correspondiente, en donde el ángulo vendrá dado por su cotangente, o bien, utilizando la fórmula análoga a la 1^a de Bessel de los triángulos polares, en cuyo caso el ángulo vendrá dado por su coseno. En esta situación la solución existe y es única.

Si los datos del triángulo esférico son dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, la resolución del triángulo presenta mayores dificultades. Como el valor del ángulo desconocido y opuesto al lado dado se calcula aplicando la 2ª fórmula de Bessel, existirá una ambigüedad procedente de la función seno. El cálculo del otro lado y su ángulo opuesto se obtiene aplicando las correspondientes fórmulas de las Analogías de Neper que proporcionan la tangente y la cotangente, respectivamente. Como en estas fórmulas, además de los lados y ángulo dados, también participa el ángulo calculado, la ambigüedad de éste se propagará a estos dos últimos elementos calculados.

En el texto se expresan las condiciones necesaria y suficiente para la existencia y la unicidad en cada una de las situaciones posibles. Las demostraciones de estas condiciones pueden realizarse según dos métodos diferentes. El primero de ellos, basado en el perpendículo, consiste en un análisis detallado de las posibles situaciones que se obtienen a medida que se aplican las fórmulas mencionadas anteriormente. En el segundo método partiendo de la aplicación al lado desconocido de la 1ª fórmula de Bessel, se obtiene una ecuación de segundo grado cuya incógnita es el seno del lado desconocido y los coeficientes son funciones de los datos del problema; analizando los coeficientes, se determinarán, en cada uno de los casos posibles, el número de soluciones, si las hubiese, que existen. Como ejemplo de aplicación del primer método se efectúa la demostración del caso en que el ángulo y el lado no opuesto a éste sean agudos; y se aplica el segundo método para el caso de que estos elementos sean obtuso y agudo, respectivamente; dejándose como práctica para el lector la demostración de los demás casos.

Por último, para resolver un triángulo esférico del cual se conocen dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos, bastará establecer el triángulo polar del dado y aplicar los resultados y métodos explicado para el caso anterior.

Prescindiendo de los casos ambiguos estudiados en las secciones precedentes, en general podemos asegurar que conocidos tres elementos de un triángulo esférico se pueden calcular cada uno de los otros tres elementos. Una consecuencia inmediata de esta dependencia es que una pequeña variación en cualquiera de los elementos conocidos producirá una variación en los elementos desconocidos.

Aunque no podemos olvidar que en este curso la justificación principal de la presencia de la Trigonometría Esférica radica en su aplicación a la Astronomía de Posición que se estudiará en capítulos posteriores, en el capítulo 4 se indican algunas aplicaciones de esta disciplina a otras cuestiones distintas de nuestra intención primera.

En este sentido, se obtiene el área de un triángulo esférico en función del exceso esférico del mismo. Se demuestra la Fórmula de L'Huilier que proporciona el exceso esférico en función del

semiperímetro y los lados del triángulo esférico. Esta expresión suele utilizarse para calcular los ángulos de un triángulo esférico cuando se conocen los lados del mismo. El exceso esférico interviene, también, en el Teorema de Legendre de la Trigonometría Esférica, que relaciona las áreas y los ángulos de un triángulo esférico suficientemente pequeño y de un triángulo plano tal que sus lados tengan las longitudes de los lados de los anteriores. Asimismo, se proporcionan expresiones para el cálculo de los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita a un triángulo esférico en función del semiperímetro y los lados, y en función de los ángulos y la semisuma de estos, respectivamente.

Finalmente, se definen conceptos geodésicos –meridiano, paralelo, latitud y longitud terrestres– y de navegación –rumbo y derrota–, de tal suerte que, a partir de estas definiciones, se pueden plantear diversos problemas sobre el arte de navegar, como cálculos de rumbos, o determinaciones de la distancia mínima entre dos puntos de la superficie terrestre o estima de tiempos de llegada a destino de barcos o aviones.

En cualquier caso, el problema consiste en la resolución de un triángulo esférico que, básicamente, viene dado por las coordenadas geográficas de los dos puntos y el polo norte de la Tierra, siendo sus lados las colatitudes respectivas y la derrota ortodrómica seguida, y los ángulos, relativos al polo norte y a ambos puntos de la superficie terrestre, serán las diferencias de longitudes y los rumbos recíprocos, respectivamente.

Palabras claves

Trigonometría Esférica. Triedro y triedros polares. Distancia esférica, polos de una circunferencia máxima y ángulos esféricos. Triángulo esférico, triángulos esféricos isósceles, equiláteros, rectángulos, rectiláteros y oblicuángulos, y triángulos esféricos polares. Exceso esférico, semiperímetro y defecto esférico. Perpendículo, mediatriz esférica y bisectriz de un ángulo esférico. Polos y circunferencia tangente a una circunferencia menor. Meridiano, paralelo, latitud y longitud de un lugar. Derrota y rumbo geográfico.

Objetivos específicos perseguidos en esta parte del texto

Con el presente texto, y guiándonos por el manejo del lenguaje matemático, la resolución de problemas y la conceptualización nos proponemos alcanzar los siguientes objetivos específicos:

- Enunciar e identificar los elementos más importantes de la geometría de la esfera, definir el triángulo esférico, utilizar dicha geometría para introducir un ejemplo de geometría no euclídea, e ilustrar las principales diferencias entre las trigonometrías plana y esférica.
- Relacionar los elementos de los triedros con los elementos de los triángulos esféricos, y obtener las propiedades y los criterios de igualdad de los triángulos esféricos a partir de esta relación.
- Obtener las principales relaciones existentes entre los elementos de un triángulo esférico: 1^a, 2^a y 3ª fórmulas de Bessel, fórmula de las cuatro partes, fórmulas análogas a las de Bessel para triángulos polares, fórmulas de Cagnoli y Borda y analogías de Gauss–Delambre y Neper.
- Resolver triángulos esféricos rectángulos, rectiláteros y oblicuángulos, cualesquiera que sean los elementos conocidos, mediante diversas estrategias generales.
- Operar con los principales métodos de resolución de triángulos esféricos: expresiones genera-

les, pentágono de Neper y perpendículo.

- Contrastar, interpretar y validar los resultados obtenidos en la resolución de triángulos esféricos.
- Ilustrar algunas aplicaciones de la Trigonometría Esférica.
- Modelizar y resolver problemas de la Navegación, aplicando las estrategias de resolución de triángulos esféricos.

De esta manera se favorecerá la abstracción y comprensión del concepto de triángulo esférico y el desarrollo de estrategias para la resolución de cualquier triángulo esférico.

Se perseguirá la adquisición de soltura en el manejo de las expresiones y estrategias para la resolución de triángulos esféricos, y la identificación de la terminología y conceptos básicos de la Trigonometría Esférica.

En el texto se acentúa la comprensión de los conceptos de triedro y triángulo esférico y la interrelación entre ellos, la resolución de triángulos esféricos y la modelización y resolución de situaciones que se producen en Navegación.

1. La Geometría de la Esfera

1.1. Los triedros y sus propiedades

Definición 1.1 *Sea $\mathbb{R}^3$ el espacio afín euclídeo y sean a, b y c, tres semirrectas con origen común V. Se denomina triedro a la figura convexa formada por el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que son comunes a los semiespacios limitados por los planos ab, bc y ca y que contienen a la semirrecta restante.*

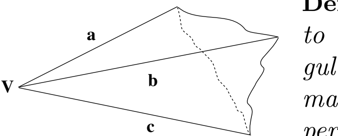
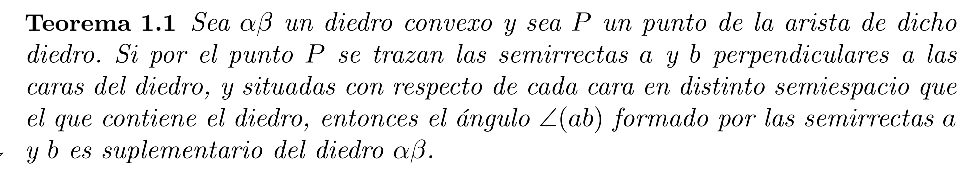


Figura 1.1: Triedro

Definición 1.2 *En todo triedro se definen los siguientes elementos:* vértice *o punto común V de las tres semirrectas,* aristas *o semirrectas a, b y c;* caras *o ángulos convexos $\angle(ab)$, $\angle(bc)$ y $\angle(ca)$;* diedros del triedro *o diedros convexos formados por dos caras consecutivas y* superficie del triedro *o conjunto de puntos pertenecientes a las caras de un triedro.*

Una consecuencia de las definiciones anteriores es que si tres planos concurren en un punto, sin pasar por una misma recta, entonces dividen el espacio en ocho triedros.



Teorema 1.1 *Sea $\alpha\beta$ un diedro convexo y sea P un punto de la arista de dicho diedro. Si por el punto P se trazan las semirrectas a y b perpendiculares a las caras del diedro, y situadas con respecto de cada cara en distinto semiespacio que el que contiene el diedro, entonces el ángulo $\angle(ab)$ formado por las semirrectas a y b es suplementario del diedro $\alpha\beta$.*

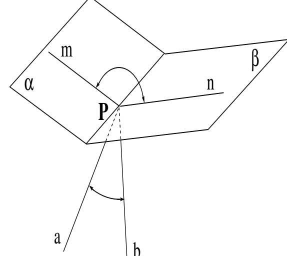


Figura 1.2: Ángulo plano y diedro suplementario

Demostración. Por ser las semirrectas a y b perpendiculares a las caras α y β del diedro, respectivamente, también lo serán a la arista del mismo. Consecuentemente, el plano determinado por ambas semirrectas será perpendicular a dicha arista cortando al diedro según el ángulo $\angle(mn)$ denominado sección recta. Por tanto,

$$\angle(mn) + \angle(nb) + \angle(ab) + \angle(am) = 4R,$$

y puesto que $\angle(nb) = \angle(am) = R$, se cumple finalmente que $\angle(mn) + \angle(ab) = 2R$.

Teorema 1.2 *Sea V el vértice del triedro T formado por las semirrectas a, b y c. Si se consideran las semirrectas a', b' y c' perpendiculares a las caras del triedro T con origen en V, estando situadas cada una de ellas en distinto semiespacio que el que contiene al triedro, entonces dichas semirrectas definen otro triedro T' cuyas caras son suplementarias de los diedros de T.*

Demostración.

$$\left.\begin{array}{l} a' \perp cb \\ b' \perp ac \end{array}\right\} \Rightarrow \angle(a'b') + \textit{diedro}\ (acb) = 2R.$$

Análogamente

$$\angle(a'c') + \textit{diedro}\ (abc) = 2R, \qquad \angle(b'c') + \textit{diedro}\ (cab) = 2R.$$

Definición 1.3 *El triedro T'(a'b'c') considerado en el teorema anterior se denomina triedro polar del triedro T(abc).*

Proposición 1.1 *En las mismas condiciones establecidas anteriormente, el triedro T es el triedro polar de T' y, consecuentemente, los diedros de T' son suplementarios de las caras de T.*

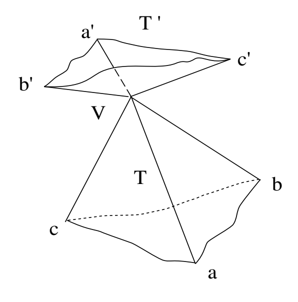


Figura 1.3: Triedros polares

Teorema 1.3 *Sea $T(abc)$ un triedro cualquiera de vértice V. Entonces se verifica que cualquiera de sus caras es menor que la suma de las otras dos.*

Demostración. Si suponemos que la cara ab es mayor que las otras dos, obviamente la demostración del teorema consistirá en demostrar que:

$$\angle(ab) < \angle(bc) + \angle(ac).$$

Consideremos sobre la cara ab la semirrecta d, tal que $\angle(ad) = \angle(ac)$. Sea AB un segmento arbitrario perteneciente a la cara ab con extremos A y B pertenecientes a las semirrectas a y b, respectivamente. Sea D el punto de intersección de este segmento con la semirrecta d y sea C un punto de la semirrecta c tal que $VC = VD$. En estas condiciones se cumple que

$$\triangle(AVC) = \triangle(AVD),$$

pues ambos triángulos tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido, y consecuentemente $AC = AD$.

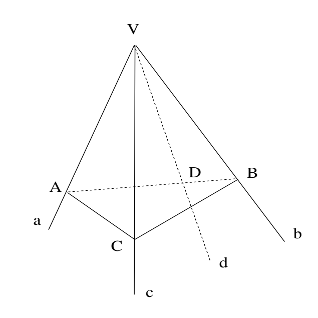


Figura 1.4

Ahora bien, en el triángulo $\triangle(ABC)$, se verifica que:

$$BC + AC > AB \Rightarrow BC > AB - AC = AB - AD = DB.$$

Por lo que los triángulos $\triangle(VBC)$ y $\triangle(VBD)$ tienen un lado común VB, un lado igual $VD = VC$ y el tercer lado $BC > DB$ desigual. Por tanto:

$$\angle(bc) > \angle(bd) = \angle(ab) - \angle(ac) \Rightarrow \angle(ab) < \angle(bc) + \angle(ac).$$

Corolario 1.1 *Toda cara de un triedro es mayor que la diferencia entre las otras dos.*

Teorema 1.4 *La suma de las caras de un triedro es menor que cuatro rectos.*

Demostración. Consideremos el triedro formado por las aristas a, b, c y la semirrecta a' opuesta a la arista a. Aplicando el teorema 1.3 a este triedro se tiene

$$\begin{aligned} &\angle(bc) < \angle(a'b) + \angle(a'c) = (2R - \angle(ab)) + (2R - \angle(ac)) = \\ &= 4R - \angle(ab) - \angle(ac) \Rightarrow \angle(ab) + \angle(ac) + \angle(bc) < 4R. \end{aligned}$$

Teorema 1.5 *La suma de los diedros de un triedro T(abc) está comprendida entre dos y seis rectos.*

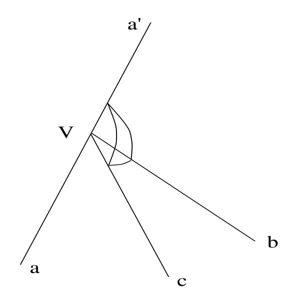


Figura 1.5

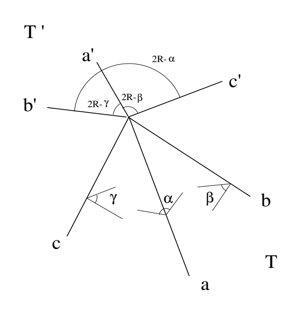


Figura 1.6

Demostración. Sea $T'(a'b'c')$ el triedro polar de $T(abc)$. Sus caras serán suplementarias de los diedros del triedro $T(abc)$. Aplicando, pues, el teorema 1.4 a las caras del triedro $T'(a'b'c')$ se tiene

$$\begin{aligned} 0 < \angle(a'b') + \angle(a'c') + \angle(b'c') < 4R, \\ 0 < (2R-\gamma) + (2R-\beta) + (2R-\alpha) < 4R, \\ \Rightarrow 0 < 6R - \alpha - \beta - \gamma < 4R, \\ \Rightarrow 6R > \alpha + \beta + \gamma > 2R. \end{aligned}$$

Teorema 1.6 *El menor de los diedros de un triedro difiere de la suma de los otros dos en menos de dos rectos.*

Demostración. Sea α el menor de los diedros de un triedro $T(abc)$. Aplicando el teorema 1.3 a las caras del triedro polar $T'(a'b'c')$ del triedro dado, se tiene

$$\angle(b'c') < \angle(a'c') + \angle(a'b').$$

Teniendo en cuenta la mencionada propiedad de los diedros del triedro y las caras del triedro polar, la anterior ecuación se puede expresar mediante $2R-\alpha < 2R-\beta+2R-\gamma$, y, por tanto, $\beta + \gamma - \alpha < 2R$.

Proposición 1.2 *Si dos caras de un triedro son iguales entonces también son iguales los diedros opuestos; y, análogamente, si dos diedros de un triedro son iguales entonces también son iguales las caras opuestas.*

Definición 1.4 *Se llama* triedro isósceles *a un triedro que tiene dos caras o, consecuentemente con la proposición anterior, dos diedros iguales.*

1.1.1. Igualdad de triedros

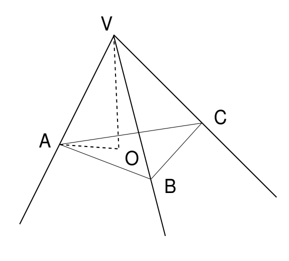
Definición 1.5 *Dos triedros son iguales cuando tienen sus caras y diedros respectivamente iguales.*

Las condiciones que establecen la igualdad de triedros expresadas en la definición anterior, caras y diedros respectivos iguales, no son independientes, de tal suerte que bastará que se verifiquen algunas de ellas para poder asegurar las igualdades restantes y, consiguientemente, la igualdad de los triedros. Los siguientes teoremas, denominados criterios de igualdad, establecen restricciones a la condición de totalidad de igualdad de caras y diedros respectivos. En dichos teoremas se consideran los triedros $T(abc)$ y $T'(a'b'c')$.

Teorema 1.7 *(1er Criterio de Igualdad) Si dos triedros tienen iguales dos caras y el diedro comprendido, entonces ambos triedros son iguales.*

Demostración. Consideremos que las caras limitadas por las semirrectas (a, b) y (a, c) del triedro T son, respectivamente, iguales a las limitadas por (a', b') y (a', c') del triedro T'; siendo el diedro comprendido aquél cuya arista común es a y a' en cada uno de los triedros. En esta situación se tiene

$$\angle(ab) = \angle(a'b'), \qquad \angle(ac) = \angle(a'c'), \qquad \alpha = \alpha'.$$



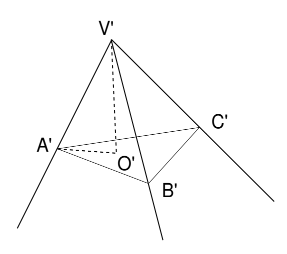


Figura 1.7

Si hacemos coincidir las caras $\angle(ab)$ y $\angle(a'b')$ de forma que también coincidan los semiespacios en que se sitúan las aristas c y c', tendremos que por ser $\alpha = \alpha'$ coincidirán los semiespacios que contienen a las caras (ac) y $(a'c')$ y por ser $\angle(ac) = \angle(a'c')$, coincidirán las aristas c y c' y por tanto los triedros T y T' serán iguales.

Teorema 1.8 *(2º Criterio de Igualdad) Si dos triedros tienen iguales una cara y los diedros contiguos entonces, ambos triedros son iguales.*

La demostración de este teorema se realiza de forma análoga a como se ha demostrado el teorema 1.7, o también, aplicando dicho teorema a los triedros polares de los triedros dados.

Teorema 1.9 *(3er Criterio de Igualdad) Si dos triedros tienen sus caras iguales entonces, dichos triedros son iguales.*

Demostración. Consideremos sobre las aristas de los triedros T y T' los puntos A, B, C, A', B' y C' tales que se verifique

$$VA = VB = VC = V'A' = V'B' = V'C'.$$

Puesto que las caras de los triedros son iguales se verifica que

$$\triangle VAB = \triangle V'A'B', \quad \triangle VAC = \triangle V'A'C', \quad \triangle VBC = \triangle V'B'C',$$

y por tanto $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, y $BC = B'C'$, luego $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

Al ser los vértices V y V' equidistantes de A, B, C y A', B', C', respectivamente, estarán sobre las perpendiculares de los planos ABC y $A'B'C'$ trazadas por los circuncentros O y O' de los triángulos respectivos. Como $AO = A'O'$ y $AV = A'V'$ entonces $VO = V'O'$, por lo que ambos triedros serán iguales.

Teorema 1.10 *(4º Criterio de Igualdad) Si dos triedros tienen los diedros iguales entonces son iguales.*

La demostración de este teorema se realiza aplicando el teorema 1.9 a los triedros polares de los triedros dados.

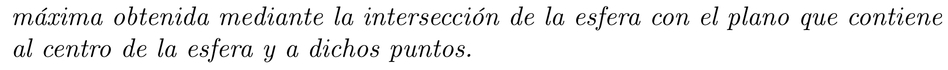
1.2. Principales conceptos de la geometría esférica

La geometría de la esfera se basa en los conceptos de circunferencias máximas, circunferencias menores y arcos de estas figuras.

Definición 1.6 *Se llama* circunferencia máxima *a la intersección de la esfera con un plano que contiene el centro de dicha esfera.*

Si el plano que interseca la esfera no contiene al centro, entonces la intersección del plano con la esfera es una circunferencia menor.

Definición 1.7 *Dados dos puntos A y B de la esfera, se denomina* distancia esférica *entre ambos al menor de los arcos de extremos A y B de la circunferencia*


máxima obtenida mediante la intersección de la esfera con el plano que contiene al centro de la esfera y a dichos puntos.

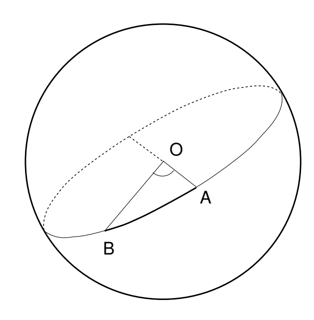


Figura 1.8: Distancia esférica

Si A y B son diametralmente opuestos entonces existirán infinitas circunferencias máximas que pasan por ellos, tomándose en este caso la semicircunferencia como distancia esférica entre ambos puntos.

Por conveniencia, se considera la esfera de radio unidad y consecuentemente, las distancias esféricas son proporcionales a los ángulos centrales que las proyectan, adoptando para su medida la de dicho ángulo central.

Dos circunferencias máximas se cortan en un diámetro de la esfera por pasar los planos que las contienen por el centro de la esfera.

Definición 1.8 *Se llaman* polos de una circunferencia máxima *a los puntos de la esfera que equidistan de todos los puntos de la circunferencia máxima. También se pueden definir como los extremos del diámetro de la esfera perpendicular a dicha circunferencia máxima.*

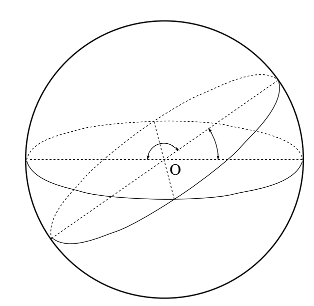


Figura 1.9: Ángulo esférico

Obviamente, todas las circunferencias máximas que son perpendiculares a una dada pasan por sus polos y la distancia esférica entre cada punto de una circunferencia máxima y sus polos es 90º.

Definición 1.9 *Se denominan* husos o ángulos esféricos *a cada una de las cuatro regiones en que queda dividida la esfera como consecuencia de la intersección de dos circunferencias máximas. También se pueden definir como la intersección de la esfera con un diedro cuya arista es uno de sus diámetros.*

La medida de cada uno de estos diedros se toma también como medida del ángulo esférico o abertura del huso correspondiente. De esta forma, dos circunferencias máximas serán perpendiculares cuando el diedro que definan sea recto.

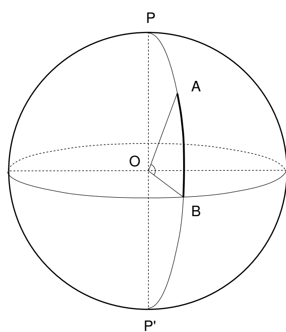
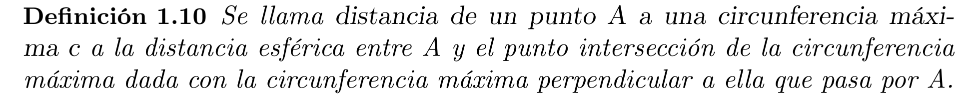


Figura 1.10


Definición 1.10 *Se llama* distancia de un punto A a una circunferencia máxima c *a la distancia esférica entre A y el punto intersección de la circunferencia máxima dada con la circunferencia máxima perpendicular a ella que pasa por A.*

Definición 1.11 *Dado un arco AB, se denomina* mediatriz esférica *a la circunferencia máxima perpendicular a la circunferencia máxima que contiene a los puntos A y B trazada por el punto medio del arco dado.*

Obviamente, todos los puntos de dicha circunferencia máxima equidistan de los puntos A y B.

Definición 1.12 *Dado un ángulo esférico $\hat{A}$, se denomina* bisectriz del ángulo *a una semicircunferencia máxima equidistante de sus lados.*

Definición 1.13 *Se llaman* polos de una circunferencia menor *a los extremos del diámetro perpendicular al plano que la contiene. El polo que está situado a una distancia esférica menor se le denomina* centro *y a esta distancia* radio esférico. *Todos los puntos que disten del centro menos que el radio esférico se*

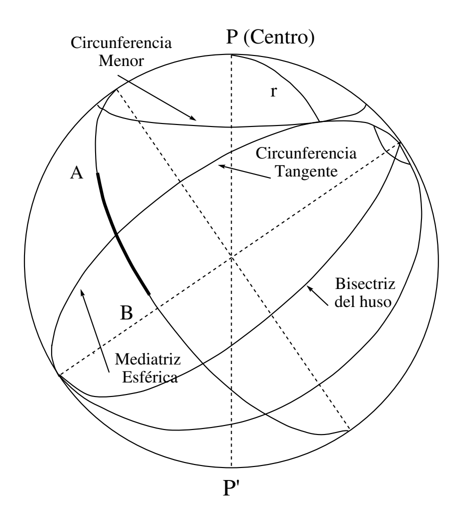


Figura 1.11: Elementos definidos sobre una esfera

dicen interiores a la circunferencia menor, y exteriores todos aquellos que disten más que el radio esférico.

Todos los puntos de una circunferencia menor equidistan de cada uno de sus polos. Recíprocamente, todos los puntos esféricos equidistantes de uno fijo están en una circunferencia, que es menor si esta distancia no es igual a un cuadrante.

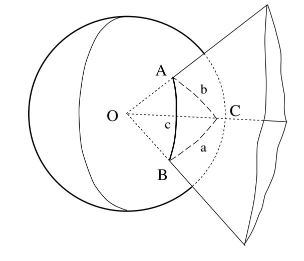


Figura 1.12: Triángulo esférico

Definición 1.14 *Se llama circunferencia tangente a una circunferencia menor por uno de sus puntos a la circunferencia máxima perpendicular a la que contiene al radio esférico de dicho punto.*

Definición 1.15 *Se denomina triángulo esférico a la superficie esférica obtenida mediante la intersección de la esfera y de un triedro cuyo vértice es el centro de dicha esfera.*

Las intersecciones A, B y C de las aristas del triedro con la esfera son los vértices del triángulo esférico. Puesto que a todo ángulo central le corresponde una distancia esférica sobre la superficie de la esfera y a cada diedro un ángulo esférico, entonces las caras del triedro serán los arcos de circunferencias máximas y a los diedros del triedro les corresponderán los ángulos del triángulo esférico. Esto es, se puede establecer una correspondencia biunívoca entre las caras y los diedros de un triedro y los lados y los ángulos de un triángulo esférico.

Definición 1.16 *La trigonometría esférica trata de las relaciones trigonométricas que existen entre los seis elementos, tres lados y tres ángulos, de un triángulo esférico, o, lo que es lo mismo, entre las caras y los diedros del triedro que define dicho triángulo esférico.*

Una de las principales diferencias entre la trigonometría plana y la esférica es que en la primera los lados se miden en unidades lineales mientras que en la segunda todos los elementos de un triángulo esférico se miden, generalmente, en unidades angulares.

Dado que las caras de un triedro dividen el espacio en ocho triedros, las circunferencias máximas a las cuales pertenecen los lados de un triángulo esférico dividirán la superficie esférica en ocho triángulos esféricos.

Si A', B' y C' son los puntos diametralmente opuestos a los vértices A, B y C del triángulo esférico, entonces los triángulos en que queda dividida la esfera son:

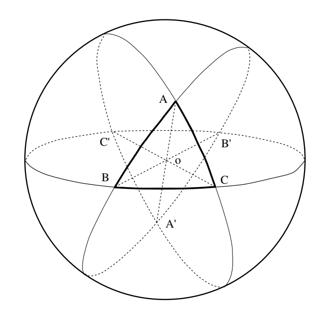


Figura 1.13

- ABC, triángulo dado.
- ABC', $AB'C$ y $A'BC$, triángulos adyacentes al ABC por tener con él un lado común.
- $A'B'C'$, triángulo simétrico al dado respecto del origen.
- $A'B'C$, $A'BC'$ y $AB'C'$, triángulos adyacentes al $A'B'C'$, o simétricos de ABC', $AB'C$ y $A'BC$, respectivamente, respecto del origen.

Definición 1.17 *Un triángulo esférico se denomina* isósceles *si tiene dos lados iguales y* equilátero *si tiene iguales los tres. Se denomina* rectángulo *si tiene un ángulo recto,* birrectángulo *si tiene dos, en cuyo caso también tiene rectos los lados opuestos, y* trirrectángulo *u* octante *si tiene los tres ángulos rectos siendo, por tanto, sus lados tres cuadrantes de circunferencia máxima.*

1.2.1. Propiedades de los triángulos esféricos

Las propiedades de los triángulos esféricos se deducen de la propia definición de triángulo esférico de tal forma que a cada propiedad relativa a los triedros le corresponde una propiedad análoga de los triángulos esféricos.

Además, dado que las caras y los diedros de un triedro con vértice en el centro de la esfera no cambian en magnitud si se varía el radio de dicha esfera, las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo esférico serán independientes de la longitud de dicho radio.

Proposición 1.3 *Entre los elementos de todo triángulo esférico se verifican las siguientes propiedades:*

- *Los lados de un triángulo esférico son menores que una semicircunferencia.*
- *La suma de los lados de un triángulo esférico es menor que cuatro rectos.*
- *Cualquier lado de un triángulo esférico es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.*
- *La suma de los ángulos de un triángulo esférico es mayor que dos rectos y menor que seis.*
- *El menor de los ángulos de un triángulo esférico difiere de la suma de los*

otros dos en menos de dos rectos.

- *Un triángulo esférico isósceles tiene iguales los ángulos opuestos a los lados iguales y, consecuentemente, si un triángulo esférico tiene dos ángulos iguales, también es isósceles.*
- *En todo triángulo esférico, a mayor lado se opone mayor ángulo y, recíprocamente, a mayor ángulo se opone mayor lado.*

1.3. Triángulos polares e igualdad de triángulos esféricos

Definición 1.18 *La intersección de una esfera con un triángulo esférico y su polar de vértice en el centro, origina dos triángulos esféricos denominados polares.*

Los vértices de cada uno de ellos son polos de las circunferencias máximas a las cuales pertenecen los lados del otro. El triángulo polar de un triángulo esférico se construye uniendo por arcos de círculo máximo los polos de los lados del triángulo dado. De los dos polos que tiene cada lado se toma el que se encuentra, respecto de la circunferencia máxima, en el hemisferio que no contiene al vértice opuesto.

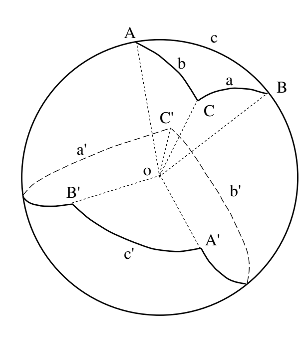


Figura 1.14: Triángulos polares

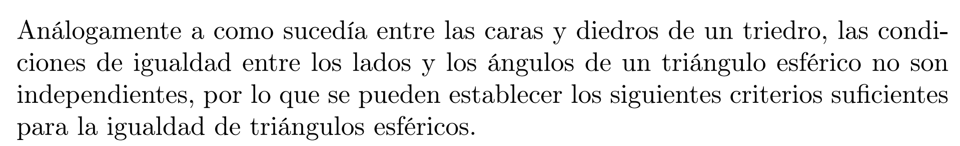
Proposición 1.4 *Los lados de un triángulo esférico son suplementarios de los ángulos de su triángulo polar y viceversa, de forma que a toda relación métrica entre los lados de uno, corresponde otra entre los ángulos del otro.*

<u>Demostración</u>. Aplicando el resultado del teorema 1.1 al diedro CAB y al ángulo a' se obtiene que

$$a' + \hat{A} = 2R.$$

De forma análoga, tomando respectivamente, los diedros CBA y ACB y los ángulos b' y c' se tienen las relaciones buscadas $b' + \hat{B} = 2R$, $c' + \hat{C} = 2R$..

De igual modo se obtendrían $a + \hat{A}' = 2R$, $b + \hat{B}' = 2R$, $c + \hat{C}' = 2R$.



Definición 1.19 *Dos triángulos esféricos se dicen iguales si tienen iguales, respectivamente, sus lados y sus ángulos.*

Análogamente a como sucedía entre las caras y diedros de un triedro, las condiciones de igualdad entre los lados y los ángulos de un triángulo esférico no son independientes, por lo que se pueden establecer los siguientes criterios suficientes para la igualdad de triángulos esféricos.

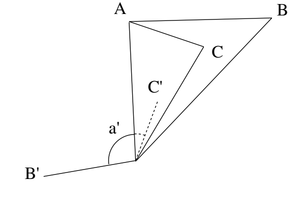
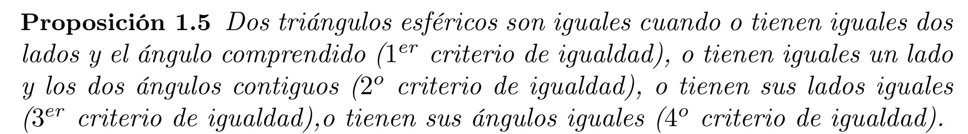


Figura 1.15



Proposición 1.5 *Dos triángulos esféricos son iguales cuando o tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido (1er criterio de igualdad), o tienen iguales un lado y los dos ángulos contiguos (2° criterio de igualdad), o tienen sus lados iguales (3er criterio de igualdad),o tienen sus ángulos iguales (4° criterio de igualdad).*

Definición 1.20 *Dado un triángulo esférico ABC, se denomina:*

i) Exceso esférico *a* $\epsilon = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - 2R$.

ii) *Perímetro del triángulo esférico a* $2p = a + b + c$.

iii) Defecto esférico *a* $d = 2\delta = 4R - 2p$.

Proposición 1.6 *La suma de los excesos esféricos/defectos de un triángulo esférico y sus adyacentes es 360º.*

Proposición 1.7 *El exceso/defecto esférico de un triángulo esférico es igual al defecto/exceso esférico de su triángulo polar.*

1.4. Comparación entre la geometría esférica y la geometría del plano

Aunque existe una cierta analogía entre algunos conceptos y propiedades de la geometría esférica y de la plana, como pueden ser: "recta-circunferencia máxima", "segmento-arco de circunferencia máxima", "ángulo plano-ángulo esférico", "semiplano-hemisferio", etc., no ocurre así con otras propiedades. Por ejemplo:

- Dos rectas en el plano se cortan en un único punto, mientras que dos circunferencias máximas se cortan en dos puntos.
- Dos perpendiculares a una recta, en el plano, son paralelas; en la esfera dos circunferencias máximas perpendiculares a otra se cortan en los polos de ésta, desapareciendo el paralelismo entre ambas circunferencias máximas.
- Como consecuencia del axioma del paralelismo, en el plano, la suma de los ángulos de un triángulo vale dos rectos, en la esfera es mayor que dos rectos.
- El lugar geométrico de los puntos de un semiplano equidistantes de una recta es otra recta paralela a la dada. En la esfera, el lugar geométrico que equidista de una circunferencia máxima es una circunferencia menor.

Estas diferencias hacen de la geometría esférica un ejemplo clásico de geometría no euclídea.

Para entender el significado de las geometrías no euclídeas es esencial familiarizarse con la geometría desarrollada por la escuela griega, de la que son representantes destacados Thales de Mileto y Platón. Ésta alcanzó su máximo apogeo en el 300 a.C. con la aparición de la obra de Euclides titulada "*Elementos*", un tratado de trece volúmenes en el que Euclides, organizando 465 proposiciones, sintetizó y desarrolló las ideas más notables que se conocían hasta ese momento, no sólo en geometría, sino también en teoría de números y álgebra.

Euclides pertenecía a la escuela de Alejandría y su gran interés por la geometría le llevó a estudiar y recopilar todo el saber de la época en una obra de gran rigor matemático, siendo uno de los primeros tratados en los que se hace uso de un método axiomático y sosteniendo, durante veinte siglos e incluso hoy día, los principios matemáticos más importantes.

Aseguraba la existencia de ciertos enunciados que tenían que ser aceptados como básicos y obvios ante la imposibilidad de ser demostrados: los *axiomas.* En este listado de axiomas Euclides distinguió entre los *postulados* o cuestiones de naturaleza geométrica, y las *nociones comunes* a todas las matemáticas. Algunas de estas nociones que aparecen en la obra de Euclides son:

- Un punto es aquello que no tiene partes.

- Una línea es una longitud sin anchura.
- Una recta es una línea que yace por igual con respecto a todos sus puntos.
- Las rectas paralelas son aquellas que, estando en un mismo plano y por más que se prolonguen en ambos sentidos, nunca se encuentran.

A pesar de la importancia de las definiciones de superficie, plano, ángulo y las distintas clases de polígonos que hace Euclides, lo verdaderamente significativo es el enunciado de una serie de postulados en los que se fundamenta su propio desarrollo de la geometría. Estos postulados son:

1. Por dos puntos pasa una única recta.
2. Un segmento rectilíneo puede ser siempre prolongado.
3. Hay una única circunferencia con un centro y un diámetro dados.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Si una secante corta a dos rectas formando a un lado ángulos interiores cuya suma es menor de dos rectos, las dos rectas suficientemente prolongados se cortan en ese mismo lado.

Los esfuerzos por demostrar este quinto postulado quedan de manifiesto en las numerosas pruebas falsas que de él se han dado desde la aparición de los Elementos hasta bien entrado el siglo XVIII. Finalmente, los matemáticos llegaron a la conclusión de que el postulado de las paralelas era independiente de los otros cuatro, de modo que podían existir geometrías en las que la negación de este quinto postulado fuese un axioma; nacen así las llamadas *geometrías no euclídeas*. Es de destacar, pues, la finura y el rigor matemático de Euclides al enunciar este axioma ante la imposibilidad de su demostración.

Un axioma equivalente al quinto de Euclides es el llamado *axioma de Playfair*:

"Dada una línea recta y un punto que no está en esa línea sólo se puede dibujar una línea conteniendo el punto y sin cortar a la otra línea".

De este modo, las geometrías no euclídeas se basan en los postulados 1-4 de Euclides y la negación de este axioma de Playfair. En 1825, el matemático Johan Bolyai dice haber construido una geometría de este tipo y así se lo hace saber a Gauss, quien al parecer había llegado por su cuenta a los mismo resultados que Bolyai. Gauss, sin embargo, no publicó sus descubrimientos por temor al escándalo que causaría entre los filósofos kantianos que opinaban que la geometría euclídea era una consecuencia de la forma de ser del espacio físico en el que vivimos.

Las dos posibles negaciones del axioma de Playfair dan lugar a dos geometrías no euclídeas bien diferentes: la geometría hiperbólica o del ángulo obtuso basada en que desde una recta y un punto que no esté sobre la línea existen, al menos, dos líneas que pasan por ese punto y que no intersecan a la línea dada; y la geometría elíptica o del ángulo agudo en donde dos rectas siempre se cortan.

1.5. Problemas

1. Demostrar que los lados de un triángulo esférico son menores que una semicircunferencia.
2. Demostrar que la suma de los lados de un triángulo esférico es menor que cuatro rectos.
3. Demostrar que la suma de los ángulos de un triángulo esférico es mayor que dos y menor que seis rectos.
4. Demostrar que el menor de los ángulos de un triángulo esférico difiere de la suma de los otros dos en menos de dos rectos.
5. Demostrar que cualquier lado de un triángulo esférico es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.
6. Demostrar los criterios de igualdad de triángulos esféricos a partir de los respectivos criterios de igualdad de triedros.
7. Demostrar que un triángulo esférico isósceles tiene iguales los ángulos opuestos a los lados iguales y, en consecuencia, si un triángulo esférico tiene dos ángulos iguales también es isósceles.
8. Demostrar que en todo triángulo esférico a mayor lado se opone mayor ángulo y recíprocamente, a mayor ángulo se opone mayor lado.
9. Demostrar que la suma de los excesos esféricos de un triángulo esférico y sus adyacentes vale 360°.
10. Demostrar que el defecto esférico de un triángulo esférico es igual al exceso esférico de su triángulo polar.
11. Demostrar que la mayor de las distancias esféricas que unen los puntos de una circunferencia menor de radio esférico r con un punto C de la superficie esférica distinto de sus polos está en la circunferencia máxima CO y es igual a $d+r$ ó $360^{\circ}-d-r$ según que C sea exterior o interior a la circunferencia simétrica de la dada respecto del centro de la esfera.
12. Demostrar que toda circunferencia máxima que dista del centro de una circunferencia menor menos que su radio esférico la corta en dos puntos.
13. Demostrar que dos circunferencias menores de radios $r > r'$ cuyos centros distan d son exteriores una a otra si $d > r + r'$; son tangentes exteriores si $d = r + r'$; son secantes en dos puntos si $r - r' < d < r + r'$; y son tangentes interiores si $d = r - r'$; y son interiores la una a la otra si $d < r - r'$.

2. Relaciones entre los elementos de un triángulo esférico

2.1. Primera, segunda y tercera Fórmulas de Bessel

Teorema 2.1 *En todo triángulo esférico, ABC se verifican las siguientes relaciones:*

(Teorema del coseno: 1ª Fórmula de Bessel) El coseno de un lado es igual al producto de los cosenos de los otros dos, más el producto de sus senos multiplicado por el coseno del ángulo comprendido,

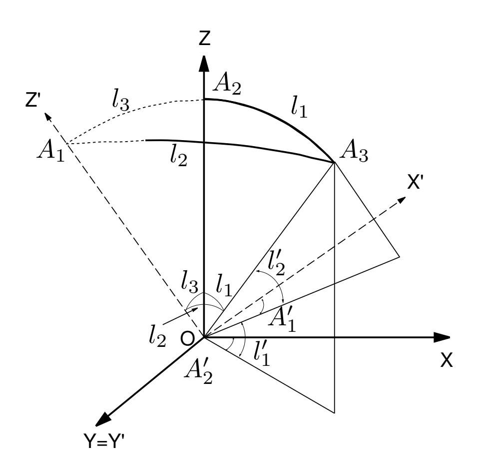
$$\cos l_1 \,=\, \cos l_2\, \cos l_3 \,+\, \operatorname{sen} l_2\, \operatorname{sen} l_3\, \cos A_1.$$

(Teorema del seno: 2ª Fórmula de Bessel) Los senos de los lados son proporcionales a lo senos de los ángulos opuestos,

$$\frac{\operatorname{sen} A_1}{\operatorname{sen} l_1} \,=\, \frac{\operatorname{sen} A_2}{\operatorname{sen} l_2} \,=\, \frac{\operatorname{sen} A_3}{\operatorname{sen} l_3}.$$

(Analogías de Bessel: 3ª Fórmula de Bessel) El seno de un lado por el coseno de un ángulo adyacente a él es igual al producto del coseno del lado opuesto al ángulo anterior por el seno del otro lado menos el producto del seno de dicho lado opuesto por el coseno del otro lado por el coseno del ángulo opuesto al lado inicial,

$$\operatorname{sen} l_1\, \cos A_2 \,=\, \cos l_2\, \operatorname{sen} l_3 \,-\, \operatorname{sen} l_2\, \cos l_3\, \cos A_1.$$



Demostración. Sean A_1, A_2, A_3 y l_1, l_2, l_3, los ángulos y los lados de un triángulo esférico. Sea $\{O; X, Y, Z\}$ un sistema de referencia euclídeo tridimensional tal que su origen

coincide con el centro de la esfera que contiene al triángulo esférico, el eje Z viene determinado por la dirección del vértice A_2 y el plano XZ contiene al lado l_3.

En estas circunstancias las coordenadas cartesianas (x, y, z) del vértice A_3 vendrán dadas por:

$$(x, y, z) = (\cos l_1' \, \cos A_2', \cos l_1' \, \operatorname{sen} A_2', \operatorname{sen} l_1'),$$

donde $l_1' = 90^{\text{o}} - l_1$ y $A_2' = 180^{\text{o}} - A_2$.

Consideremos ahora el sistema de referencia euclídeo tridimensional $\{O; X', Y', Z'\}$ de tal forma que $Y' \equiv Y$ y el eje Z' esté definido por la dirección del vértice A_1. Consecuentemente, el eje X' también pertenece al plano que contiene a los ejes X, Z y Z'. Entonces respecto a este sistema de referencia las coordenadas cartesianas (x', y', z') del vértice A_3 vendrán dadas por:

$$(x', y', z') = (\cos l_2' \, \cos A_1', \cos l_2' \, \operatorname{sen} A_1', \operatorname{sen} l_2'),$$

donde $l_2' = 90^{\text{o}} - l_2$ y $A_1' = A_1$.

Realizando una rotación de ángulo l_3 alrededor del eje Y' haremos coincidir ambos sistemas de referencia y, consecuentemente, las respectivas coordenadas cartesianas del vértice A_3. Así, tendremos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos l_3 & 0 & -\operatorname{sen} l_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} l_3 & 0 & \cos l_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

desarrollando esta expresión se tiene:

$$\begin{aligned} \cos l_1' \, \cos A_2' &= \cos l_3 \, \cos l_2' \, \cos A_1' \, - \, \operatorname{sen} l_3 \, \operatorname{sen} l_2', \\ \cos l_1' \, \operatorname{sen} A_2' &= \cos l_2' \, \operatorname{sen} A_1', \\ \operatorname{sen} l_1' &= \operatorname{sen} l_3 \, \cos l_2' \, \cos A_1' \, + \, \cos l_3 \, \operatorname{sen} l_2'. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\operatorname{sen} l_1 \, \cos A_2 \, = \, \cos l_2 \, \operatorname{sen} l_3 \, - \, \operatorname{sen} l_2 \, \cos l_3 \, \cos A_1,$$

$$\frac{\operatorname{sen} l_1}{\operatorname{sen} A_1} = \frac{\operatorname{sen} l_2}{\operatorname{sen} A_2} = \frac{\operatorname{sen} l_3}{\operatorname{sen} A_3},$$

$$\cos l_1 \, = \, \cos l_2 \, \cos l_3 \, + \, \operatorname{sen} l_2 \, \operatorname{sen} l_3 \, \cos A_1.$$

2.1.1. Relaciones análogas

Proposición 2.1 *El coseno de un ángulo es igual al producto de los senos de los otros dos ángulos por el coseno del lado opuesto menos el producto de los cosenos de dichos ángulos,*

$$\cos A_1 \, = \, - \, \cos A_2 \, \cos A_3 \, + \, \operatorname{sen} A_2 \, \operatorname{sen} A_3 \, \cos l_1.$$

Demostración. Aplicando la primera fórmula de Bessel a uno de los lados del triángulo polar del triángulo esférico dado, se tiene

$$\cos l_1' \, = \, \cos l_2' \, \cos l_3' \, + \, \operatorname{sen} l_2' \, \operatorname{sen} l_3' \, \cos A_1'.$$

Puesto que

$$l_1' = \pi - A_1, l_2' = \pi - A_2, \text{ y } l_3' = \pi - A_3, \, A_1' = \pi - l_1,$$

sustituyendo estas igualdades en la ecuación anterior nos queda finalmente

$$-\cos A_1 \,=\, \cos A_2 \, \cos A_3 \,-\, \operatorname{sen} A_2 \, \operatorname{sen} A_3 \, \cos l_1.$$

Proposición 2.2 *El seno de un ángulo por el coseno de un lado adyacente es igual al producto del coseno del ángulo opuesto a dicho lado por el seno del otro ángulo más el producto del seno y coseno de dichos ángulos, respectivamente, por el coseno del lado opuesto al ángulo inicial,*

$$\operatorname{sen} A_1 \, \cos l_2 \,=\, \cos A_2 \, \operatorname{sen} A_3 \,+\, \operatorname{sen} A_2 \, \cos A_3 \, \cos l_1.$$

2.2. Fórmulas de las cuatro partes, de Cagnoli y de Borda

Proposición 2.3 *(Fórmula de las cuatro partes) Dados dos lados (l_1, l_2), el ángulo comprendido (A_3) y el ángulo opuesto a uno de ellos (A_2), se verifica que*

$$\cos l_1 \cos A_3 = \operatorname{sen} l_1 \cot l_2 - \operatorname{sen} A_3 \cot A_2.$$

Demostración. Partimos de las expresiones correspondientes a la 1ª fórmula de Bessel aplicadas a los lados l_2 y l_3

$$\cos l_2 \,=\, \cos l_1 \, \cos l_3 \,+\, \operatorname{sen} l_1 \, \operatorname{sen} l_3 \, \cos A_2, \tag{1}$$

$$\cos l_3 \,=\, \cos l_1 \, \cos l_2 \,+\, \operatorname{sen} l_1 \, \operatorname{sen} l_2 \, \cos A_3. \tag{2}$$

Sustituyendo la ecuación (2) en (1), y operando se tiene

$$\cos l_2 \,(1 - \cos^2 l_1) \,=\, \cos l_1 \, \operatorname{sen} l_2 \, \operatorname{sen} l_1 \, \cos A_3 \,+\, \operatorname{sen} l_3 \, \operatorname{sen} l_1 \, \cos A_2.$$

Sustituyendo $1 - \cos^2 l_1$ por $\operatorname{sen}^2 l_1$ y dividiendo por $\operatorname{sen} l_1 \operatorname{sen} l_2$ se obtiene

$$\cot l_2 \, \operatorname{sen} l_1 \,=\, \cos l_1 \, \cos A_3 \,+\, \frac{\operatorname{sen} l_3}{\operatorname{sen} l_2} \, \cos A_2.$$

Finalmente, aplicando la 2ª fórmula de Bessel se concluye

$$\cos l_1 \, \cos A_3 \,=\, \operatorname{sen} l_1 \, \cot l_2 \,-\, \operatorname{sen} A_3 \, \cot A_2.$$

Proposición 2.4 *(Fórmula de Cagnoli) Los elementos de un triángulo esférico quedan relacionados por la siguiente expresión:*

$$\operatorname{sen} l_2 \, \operatorname{sen} l_3 \,+\, \cos l_2 \, \cos l_3 \, \cos A_1 \,=\, \operatorname{sen} A_2 \, \operatorname{sen} A_3 \,-\cos A_2 \, \cos A_3 \, \cos l_1.$$

Demostración. Consideremos las relaciones

$$\cos l_1 \;=\; \cos l_2 \,\cos l_3 \;+\; \operatorname{sen} l_2 \,\operatorname{sen} l_3 \,\cos A_1, \tag{3}$$
$$\cos A_1 \;=\; -\,\cos A_2 \,\cos A_3 \;+\; \operatorname{sen} A_2 \,\operatorname{sen} A_3 \,\cos l_1. \tag{4}$$

Multiplicando la ecuación (3) por $\cos A_1$ y la (4) por $\cos l_1$, y restándolas, se obtiene

$$\begin{aligned} 0 \;=\; \cos l_2 \,\cos l_3 \,\cos A_1 \;+\; \operatorname{sen} l_2 \,\operatorname{sen} l_3 \,\cos^2 A_1 \;+\; \cos l_1 \,\cos A_2 \,\cos A_3 \\ -\,\operatorname{sen} A_2 \,\operatorname{sen} A_3 \,\cos^2 l_1, \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \cos l_2 \,\cos l_3 \,\cos A_1 \;+\; \operatorname{sen} l_2 \,\operatorname{sen} l_3 \,\cos^2 A_1 \;=\; -\,\cos l_1 \,\cos A_2 \,\cos A_3 + \\ +\operatorname{sen} A_2 \,\operatorname{sen} A_3 \,\cos^2 l_1, \end{aligned}$$

sustituyendo $\cos^2 A_1 = 1 - \operatorname{sen}^2 A_1$ y $\cos^2 l_1 = 1 - \operatorname{sen}^2 l_1$, resulta

$$\begin{aligned} \cos l_2 \,\cos l_3 \,\cos A_1 \;+\operatorname{sen} l_2 \,\operatorname{sen} l_3 \;-\operatorname{sen} l_2 \,\operatorname{sen} l_3 \,\operatorname{sen}^2 A_1 \;= \\ =\;-\,\cos l_1 \,\cos A_2 \,\cos A_3 \;+\operatorname{sen} A_2 \,\operatorname{sen} A_3 \;-\;\operatorname{sen} A_2 \,\operatorname{sen} A_3 \,\operatorname{sen}^2 l_1. \end{aligned} \tag{5}$$

De la segunda fórmula de Bessel se obtiene que

$$\operatorname{sen}^2 l_1 \,\operatorname{sen} A_2 \,\operatorname{sen} A_3 \;=\; \operatorname{sen} l_2 \,\operatorname{sen} l_3 \,\operatorname{sen}^2 A_1,$$

luego suprimiendo estos términos comunes en la expresión (5), se tendrá finalmente

$$\operatorname{sen} l_2 \,\operatorname{sen} l_3 \;+\; \cos l_2 \,\cos l_3 \,\cos A_1 \;=\; \operatorname{sen} A_2 \,\operatorname{sen} A_3 \;-\; \cos A_2 \,\cos A_3 \,\cos l_1.$$

Proposición 2.5 *(Fórmulas de Borda) En un triángulo esférico, el seno y el coseno de un semiángulo vienen dados por*

$$\operatorname{sen} \frac{A_1}{2} \;=\; \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p \,-\, l_2)\operatorname{sen}(p \,-\, l_3)}{\operatorname{sen} l_2 \,\operatorname{sen} l_3}}, \qquad \cos \frac{A_1}{2} \;=\; \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \,\operatorname{sen}(p \,-\, l_1)}{\operatorname{sen} l_2 \,\operatorname{sen} l_3}}.$$

siendo p el semiperímetro de dicho triángulo.

Demostración. Demostremos el primero de estos resultados. Despejando $\cos A_1$ de la primera fórmula de Bessel se deduce

$$\cos A_1 \;=\; \frac{\cos l_1 \;-\; \cos l_2 \,\cos l_3}{\operatorname{sen} l_2 \,\operatorname{sen} l_3}.$$

Sustituyendo este valor en las expresiones

$$\operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \,\cos A}{2}, \qquad \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1 + \,\cos A}{2},$$

se obtiene

$$2\,\mathrm{sen}^2\frac{A_1}{2} = 1 - \frac{\cos l_1 - \cos l_2\,\cos l_3}{\mathrm{sen}\, l_2\,\mathrm{sen}\, l_3} = \frac{\cos(l_2 - l_3) - \cos l_1}{\mathrm{sen}\, l_2\,\mathrm{sen}\, l_3}$$

$$= \frac{2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(l_1 + l_2 - l_3)\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(l_1 + l_3 - l_2)}{\mathrm{sen}\, l_2\,\mathrm{sen}\, l_3}$$

$$= \frac{2\,\mathrm{sen}\,(p - l_2)\,\mathrm{sen}\,(p - l_3)}{\mathrm{sen}\, l_2\,\mathrm{sen}\, l_3},$$

de donde

$$\mathrm{sen}\,\frac{A_1}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{sen}\,(p - l_2)\,\mathrm{sen}\,(p - l_3)}{\mathrm{sen}\, l_2\,\mathrm{sen}\, l_3}}.$$

Efectuando un proceso análogo se demostraría que

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{sen}\, p\,\mathrm{sen}\,(p - l_1)}{\mathrm{sen}\, l_2\,\mathrm{sen}\, l_3}}.$$

Corolario 2.1 *En un triángulo esférico, la tangente de un semiángulo viene dada por*

$$\tan\frac{A_1}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{sen}\,(p - l_1)\,\mathrm{sen}\,(p - l_3)}{\mathrm{sen}\, p\,\mathrm{sen}\,(p - l_2)}}.$$

Las fórmulas de Borda se aplican en la resolución de triángulos esféricos mediante la aplicación del cálculo logarítmico. Si utilizamos calculadoras resulta conveniente usar las siguientes expresiones

$$\mathrm{sen}\,\frac{A_1}{2} = \sqrt{\frac{\cos(l_2 - l_3) - \cos l_1}{2\,\mathrm{sen}\, l_2\,\mathrm{sen}\, l_3}}, \qquad \cos\frac{A_1}{2} = \sqrt{\frac{\cos l_1 - \cos(l_2 + l_3)}{2\,\mathrm{sen}\, l_2\,\mathrm{sen}\, l_3}},$$

y, en consecuencia: $\tan\dfrac{A_1}{2} = \sqrt{\dfrac{\cos(l_3 - l_2) - \cos l_1}{\cos l_1 - \cos(l_2 + l_3)}}$.

Proposición 2.6 *El seno y el coseno de un semilado en un triángulo esférico vienen dados por*

$$\mathrm{sen}\,\frac{l_1}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{sen}\, E\,\mathrm{sen}\,(A_1 - E)}{\mathrm{sen}\, A_2\,\mathrm{sen}\, A_3}}, \qquad \cos\frac{l_1}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{sen}\,(A_2 - E)\,\mathrm{sen}\,(A_3 - E)}{\mathrm{sen}\, A_2\,\mathrm{sen}\, A_3}}.$$

donde E denota el semiexceso esférico del triángulo.

Corolario 2.2 *La tangente de un semilado viene dada por*

$$\tan\frac{l_1}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{sen}\, E\,\mathrm{sen}\,(A_1 - E)}{\mathrm{sen}\,(A_2 - E)\,\mathrm{sen}\,(A_3 - E)}}.$$

De forma análoga al caso anterior, en el cálculo práctico con calculadoras se suelen utilizar las siguientes expresiones:

$$\operatorname{sen}\frac{l_1}{2}=\sqrt{-\frac{\cos(A_2+A_3)+\cos A_1}{2\operatorname{sen}A_2\operatorname{sen}A_3}}\qquad \cos\frac{l_1}{2}=\sqrt{\frac{\cos(A_2-A_3)+\cos A_1}{2\operatorname{sen}A_2\operatorname{sen}A_3}}$$

y, consecuentemente: $\tan\frac{l_1}{2}=\sqrt{-\frac{\cos(A_2+A_3)+\cos A_1}{\cos(A_2-A_3)+\cos A_1}}$.

2.3. Analogías de Gauss-Delambre y de Neper

Proposición 2.7 *Las cuatro analogías de Gauss-Delambre se expresan por:*

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{A_1+A_2}{2}}{\cos\frac{A_3}{2}}=\frac{\cos\frac{l_1-l_2}{2}}{\cos\frac{l_3}{2}},\qquad \frac{\operatorname{sen}\frac{A_1-A_2}{2}}{\cos\frac{A_3}{2}}=\frac{\operatorname{sen}\frac{l_1-l_2}{2}}{\operatorname{sen}\frac{l_3}{2}},$$

$$\frac{\cos\frac{A_1+A_2}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A_3}{2}}=\frac{\cos\frac{l_1+l_2}{2}}{\cos\frac{l_3}{2}},\qquad \frac{\cos\frac{A_1-A_2}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A_3}{2}}=\frac{\operatorname{sen}\frac{l_1+l_2}{2}}{\operatorname{sen}\frac{l_3}{2}}.$$

Demostración. Si en las fórmulas

$$\operatorname{sen}\frac{A_1\pm A_2}{2}=\operatorname{sen}\frac{A_1}{2}\cos\frac{A_2}{2}\pm\cos\frac{A_1}{2}\operatorname{sen}\frac{A_2}{2},$$

$$\cos\frac{A_1\pm A_2}{2}=\cos\frac{A_1}{2}\cos\frac{A_2}{2}\mp\operatorname{sen}\frac{A_1}{2}\operatorname{sen}\frac{A_2}{2},$$

sustituimos los valores obtenidos por la fórmula de Borda para:

$$\cos\frac{A_1}{2},\ \cos\frac{A_2}{2},\ \operatorname{sen}\frac{A_1}{2},\ \operatorname{sen}\frac{A_2}{2},$$

tendremos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\frac{A_1\pm A_2}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-l_3)}{\operatorname{sen}l_1\operatorname{sen}l_2}}\left(\frac{\operatorname{sen}(p-l_2)\pm\operatorname{sen}(p-l_1)}{\operatorname{sen}l_3}\right)\\ &= \cos\frac{A_3}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}(p-l_2)\pm\operatorname{sen}(p-l_1)}{\operatorname{sen}c}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\frac{A_1\pm A_2}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-l_1)\operatorname{sen}(p-l_2)}{\operatorname{sen}l_1\operatorname{sen}l_2}}\left(\frac{\operatorname{sen}p\mp\operatorname{sen}(p-l_3)}{\operatorname{sen}l_3}\right)\\ &= \cos\frac{A_3}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}p\mp\operatorname{sen}(p-l_3)}{\operatorname{sen}l_3}\right).\end{aligned}$$

Pero

$$\operatorname{sen}(p+l_1)+\operatorname{sen}(p-l_2)=2\operatorname{sen}\frac{l_3}{2}\cos\frac{l_1-l_2}{2},$$

$$\operatorname{sen}(p-l_2)-\operatorname{sen}(p-l_1)=2\cos\frac{l_3}{2}\operatorname{sen}\frac{l_1-l_2}{2},$$

$$\operatorname{sen}p+\operatorname{sen}(p-l_3)=2\operatorname{sen}\frac{l_1+l_2}{2}\cos\frac{l_3}{2},$$

$$\operatorname{sen}p-\operatorname{sen}(p-l_3)=2\cos\frac{l_1+l_2}{2}\operatorname{sen}\frac{l_3}{2},$$

$$\operatorname{sen}l_3=2\operatorname{sen}\frac{l_3}{2}\cos\frac{l_3}{2},$$

luego sustituyendo y separando valores, se tiene

$$\frac{\operatorname{sen}\dfrac{A_1+A_2}{2}}{\cos\dfrac{A_3}{2}}=\frac{\cos\dfrac{l_1-l_2}{2}}{\cos\dfrac{l_3}{2}},\qquad \frac{\operatorname{sen}\dfrac{A_1-A_2}{2}}{\cos\dfrac{A_3}{2}}=\frac{\operatorname{sen}\dfrac{l_1-l_2}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{l_3}{2}},$$

$$\frac{\cos\dfrac{A_1+A_2}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{A_3}{2}}=\frac{\cos\dfrac{l_1+l_2}{2}}{\cos\dfrac{l_3}{2}},\qquad \frac{\cos\dfrac{A_1-A_2}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{A_3}{2}}=\frac{\operatorname{sen}\dfrac{l_1+l_2}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{l_3}{2}}.$$

Al participar en estas expresiones los seis elementos del triángulo, suelen ser muy útiles para comprobar los valores de dichos elementos calculados mediante otras expresiones.

Proposición 2.8 *Las cuatro analogías de Neper se enuncian como sigue:*

$$\frac{\tan\dfrac{A_1+A_2}{2}}{\cot\dfrac{A_3}{2}}=\frac{\cos\dfrac{l_1-l_2}{2}}{\cos\dfrac{l_1+l_2}{2}},\qquad \frac{\tan\dfrac{A_1-A_2}{2}}{\cot\dfrac{A_3}{2}}=\frac{\operatorname{sen}\dfrac{l_1-l_2}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{l_1+l_2}{2}},$$

$$\frac{\tan\dfrac{l_1+l_2}{2}}{\tan\dfrac{l_3}{2}}=\frac{\cos\dfrac{A_1-A_2}{2}}{\cos\dfrac{A_1+A_2}{2}},\qquad \frac{\tan\dfrac{l_1-l_2}{2}}{\tan\dfrac{l_3}{2}}=\frac{\operatorname{sen}\dfrac{A_1-A_2}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{A_1+A_2}{2}}.$$

Demostración. Una demostración obvia resulta de considerar las expresiones de la proposición anterior. No obstante, a continuación, veremos cómo se demuestran estas ecuaciones directamente. Partimos de las ecuaciones

$$\begin{aligned}\cos A_1 &= -\cos A_2\cos A_3+\operatorname{sen}A_2\operatorname{sen}A_3\cos l_1,\\ \cos A_2 &= -\cos A_1\cos A_3+\operatorname{sen}A_1\operatorname{sen}A_3\cos l_2.\end{aligned}$$

Sumando ambas expresiones, resulta

$$(\cos A_1+\cos A_2)(1+\cos A_3)=\operatorname{sen}A_3(\operatorname{sen}A_2\cos l_1+\operatorname{sen}A_1\cos l_2). \tag{6}$$

De la segunda fórmula de Bessel

$$\frac{\operatorname{sen} l_1}{\operatorname{sen} A_1} = \frac{\operatorname{sen} l_2}{\operatorname{sen} A_2} = \frac{\operatorname{sen} l_3}{\operatorname{sen} A_3} = \frac{1}{m},$$

se obtiene

$$\operatorname{sen} A_1 = m \operatorname{sen} l_1, \qquad \operatorname{sen} A_2 = m \operatorname{sen} l_2, \tag{7}$$

que al sustituir en la ecuación (6), se transforma en

$$(\cos A_1 + \cos A_2)\, 2 \cos^2 \frac{A_3}{2} = 2 \operatorname{sen} \frac{A_3}{2} \cos \frac{A_3}{2}\, m \operatorname{sen}(l_1 + l_2), \tag{8}$$

de donde

$$\cos A_1 + \cos A_2 = 2\, m \tan \frac{A_3}{2} \operatorname{sen} \frac{l_1 + l_2}{2} \cos \frac{l_1 + l_2}{2}. \tag{9}$$

De las relaciones en (7), se deduce

$$\operatorname{sen} A_1 + \operatorname{sen} A_2 = 2\, m \operatorname{sen} \frac{l_1 + l_2}{2} \cos \frac{l_1 - l_2}{2},$$

$$\operatorname{sen} A_1 - \operatorname{sen} A_2 = 2\, m \cos \frac{l_1 + l_2}{2} \operatorname{sen} \frac{l_1 - l_2}{2},$$

y dividiendo cada una de estas igualdades por la expresión (9), se obtiene

$$\frac{\operatorname{sen} A_1 + \operatorname{sen} A_2}{\cos A_1 + \cos A_2} = \frac{\cos \frac{l_1 - l_2}{2}}{\cos \frac{l_1 + l_2}{2}} \cot \frac{A_3}{2}, \tag{10}$$

$$\frac{\operatorname{sen} A_1 - \operatorname{sen} A_2}{\cos A_1 + \cos A_2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{l_1 - l_2}{2}}{\operatorname{sen} \frac{l_1 + l_2}{2}} \cot \frac{A_3}{2}, \tag{11}$$

puesto que los primeros miembros de las igualdades (10) y (11) equivalen, respectivamente, a

$$\frac{2 \operatorname{sen} \frac{A_1 + A_2}{2} \cos \frac{A_1 - A_2}{2}}{2 \cos \frac{A_1 + A_2}{2} \cos \frac{A_1 - A_2}{2}}, \qquad \frac{2 \cos \frac{A_1 + A_2}{2} \operatorname{sen} \frac{A_1 - A_2}{2}}{2 \cos \frac{A_1 + A_2}{2} \cos \frac{A_1 - A_2}{2}}$$

se tiene, finalmente, que

$$\frac{\tan \frac{A_1 + A_2}{2}}{\cot \frac{A_3}{2}} = \frac{\cos \frac{l_1 - l_2}{2}}{\cos \frac{l_1 + l_2}{2}}, \qquad \frac{\tan \frac{A_1 - A_2}{2}}{\cot \frac{A_3}{2}} = \frac{\operatorname{sen} \frac{l_1 - l_2}{2}}{\operatorname{sen} \frac{l_1 + l_2}{2}}.$$

Procediendo de igual modo, y partiendo de las ecuaciones

$$\cos l_1 = \cos l_2 \cos l_3 + \operatorname{sen} l_2 \operatorname{sen} l_3 \cos A_1,$$
$$\cos l_2 = \cos l_1 \cos l_3 + \operatorname{sen} l_1 \operatorname{sen} l_3 \cos A_2,$$

se obtendrían las otras dos expresiones buscadas, esto es

$$\frac{\tan\dfrac{l_1\,+\,l_2}{2}}{\tan\dfrac{l_3}{2}} = \frac{\cos\dfrac{A_1\,-\,A_2}{2}}{\cos\dfrac{A_1\,+\,A_2}{2}}, \qquad \frac{\tan\dfrac{l_1\,-\,l_2}{2}}{\tan\dfrac{l_3}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\dfrac{A_1\,-\,A_2}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{A_1\,+\,A_2}{2}}.$$

2.4. Fórmulas diferenciales

Proposición 2.9 *La variación que experimenta un lado al variar los otros dos lados y el ángulo comprendido viene dada por:*

$$dl_1 = \cos A_3\, dl_2 + \cos A_2\, dl_3 + \operatorname{sen} l_3 \operatorname{sen} A_2\, dA_1.$$

Demostración. Consideremos la 1ª fórmula de Bessel:

$$\cos l_1 - \cos l_2\, \cos l_3 - \operatorname{sen} l_2\, \operatorname{sen} l_3\, \cos A_1 = 0.$$

Diferenciando se obtiene:

$$\begin{aligned}&-\operatorname{sen} l_1\, dl_1 + (\operatorname{sen} l_2\, \cos l_3 - \cos l_2\, \operatorname{sen} l_3\, \cos A_1)\, dl_2 +\\ &+(\cos l_2\, \operatorname{sen} l_3 - \operatorname{sen} l_2\, \cos l_3\, \cos A_1)\, dl_3 + \operatorname{sen} l_2\, \operatorname{sen} l_3\, \operatorname{sen} A_1\, dA_1 = 0.\end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones de los paréntesis por las correspondientes igualdades dadas por las Analogías de Bessel (3ª fórmula de Bessel), utilizando la relación del seno y dividiendo por $\operatorname{sen} l_1$, se obtiene finalmente:

$$dl_1 = \cos A_3\, dl_2 + \cos A_2\, dl_3 + \operatorname{sen} l_3\, \operatorname{sen} A_2\, dA_1.$$

En esta expresión si uno de los elementos conocidos no varía el miembro correspondiente se anula.

Proposición 2.10 *La variación que experimenta un lado viene dada por:*

1. *En función de las variaciones de dos ángulos y el lado comprendido*

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} A_3\, dl_1 &= \operatorname{sen} l_2\, dA_1 + \cos A_3 \operatorname{sen} l_1\, dA_2 + \operatorname{sen} A_1 \cos l_2\, dl_3\\ \operatorname{sen} A_3\, dl_2 &= \operatorname{sen} l_1\, dA_2 + \cos A_3 \operatorname{sen} l_2\, dA_1 + \operatorname{sen} A_2 \cos l_1\, dl_3\end{aligned}$$

2. *En función de las variaciones de dos ángulos, uno de los cuales es su opuesto, y el lado opuesto al otro ángulo adyacentes*

$$\begin{aligned}\cot l_1\, dl_1 &= \cot l_2\, dl_2 + \cot A_1\, dA_1 - \cot A_2\, dA_2\\ \cot l_1\, dl_1 &= \cot l_3\, dl_3 + \cot A_1\, dA_1 - \cot A_3\, dA_3\end{aligned}$$

Proposición 2.11 *La variación que experimenta un ángulo viene dada por:*

1. *En función de las variaciones de los tres lados*

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} l_1\, dA_2 &= \operatorname{sen} A_3\, dl_2 - \cos l_1 \operatorname{sen} A_2\, dl_3 - \operatorname{sen} l_2 \cos A_3\, dl_1\\ \operatorname{sen} l_1\, dA_3 &= \operatorname{sen} A_2\, dl_3 - \cos l_1 \operatorname{sen} A_3\, dl_2 - \operatorname{sen} l_3 \cos A_2\, dl_1\end{aligned}$$

2. *En función de las variaciones de los otros dos ángulos y del lado comprendido*

$$dA_1 = \operatorname{sen} l_2 \operatorname{sen} A_3\, dl_1 - \cos l_3\, dA_2 - \cos l_2\, dA_3$$

Las fórmulas precedentes proporcionan directamente las variaciones que experimenta un lado o un ángulo al variar tres de los otros elementos del triángulo y permiten estudiar la influencia que el error existente en un elemento produce en los otros; posibilitando la elección previa de las fórmulas óptimas que minimizan la influencia de estos errores.

2.5. Problemas

1. Demostrar las fórmulas de Bessel en un triángulo esférico a partir del triángulo plano obtenido como la proyección radial del triángulo esférico sobre el plano tangente a la esfera y que contiene a un vértice de dicho triángulo esférico.
2. Demostrar la 2ª fórmula de Bessel a partir de combinaciones –sumas y restas– de las ecuaciones que conforman el grupo de la 1ª fórmula de Bessel.
3. Demostrar que: $\operatorname{sen} A_1 \cos l_2 = \cos A_2 \operatorname{sen} A_3 + \operatorname{sen} A_2 \cos A_3 \cos l_1$.
4. Demostrar que: $\cos l_2 \cos A_1 = \operatorname{sen} l_2 \cot l_3 - \operatorname{sen} A_1 \cot A_3$.
5. Demostrar que:

$$\operatorname{sen} l_1 \operatorname{sen} l_2 + \cos l_1 \cos l_2 \cos A_3 = \operatorname{sen} A_1 \operatorname{sen} A_2 - \cos A_1 \cos A_2 \cos l_3.$$

6. Demostrar que:

$$\cos\frac{A_2}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p - l_2)}{\operatorname{sen} l_1 \operatorname{sen} l_3}} = \sqrt{\frac{\cos l_2 - \cos(l_1 + l_3)}{2 \operatorname{sen} l_1 \operatorname{sen} l_3}}$$

siendo p el semiperímetro del triángulo esférico.

7. Demostrar que:

$$\operatorname{sen}\frac{l_2}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} E \operatorname{sen}(A_2 - E)}{\operatorname{sen} A_1 \operatorname{sen} A_3}} = \sqrt{\frac{-\cos S \cos(S - A_2)}{\operatorname{sen} A_2 \operatorname{sen} A_3}}$$

siendo E y S el semiexceso esférico y la semisuma de los ángulos del triángulo esférico, respectivamente.

8. Demostrar que:

$$\cos\frac{l_1}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(A_2 - E) \operatorname{sen}(A_3 - E)}{\operatorname{sen} A_2 \operatorname{sen} A_3}} = \sqrt{\frac{\cos(A_2 - A_3) + \cos A_1}{2 \operatorname{sen} A_2 \operatorname{sen} A_3}}$$

siendo E el semiexceso esférico del triángulo esférico.

9. Demostrar que:

$$i)\ \frac{\operatorname{sen}\dfrac{A_1 - A_2}{2}}{\cos\dfrac{A_3}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\dfrac{l_1 - l_2}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{l_3}{2}}, \qquad ii)\ \frac{\cos\dfrac{A_3 + A_2}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{A_1}{2}} = \frac{\cos\dfrac{l_3 + l_2}{2}}{\cos\dfrac{l_1}{2}}.$$

10. Demostrar que:

$$i)\ \frac{\operatorname{sen}\dfrac{A_1 + A_3}{2}}{\cos\dfrac{A_2}{2}} = \frac{\cos\dfrac{l_1 - l_3}{2}}{\cos\dfrac{l_2}{2}}, \qquad ii)\ \frac{\cos\dfrac{A_2 - A_3}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{A_1}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\dfrac{l_2 + l_3}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{l_1}{2}}.$$

11. Expresar en función de los lados el producto: $\operatorname{sen} A_1 \operatorname{sen} A_2 \operatorname{sen} A_3$; y en función de los ángulos el producto: $\operatorname{sen} l_1 \operatorname{sen} l_2 \operatorname{sen} l_3$.

12. Demostrar que si D es un punto del lado BC del triángulo esférico ABC entonces: $\cos AD \operatorname{sen} BC = \cos AB \operatorname{sen} DC + \cos AC \operatorname{sen} BD$.

13. Demostrar que:

   i) $dA_1 = \operatorname{sen} l_2 \operatorname{sen} A_3\, dl_1 - \cos l_3\, dA_2 - \cos l_2\, dA_3$.

   ii) $\operatorname{sen} A_3\, dl_1 = \operatorname{sen} l_2\, dA_1 + \cos A_3 \operatorname{sen} l_1\, dA_2 + \operatorname{sen} A_1 \cos l_2\, dl_3$.

   iii) $\cot l_1\, dl_1 = \cot l_2\, dl_2 + \cot A_1\, dA_1 - \cot A_2\, dA_2$.

   iv) $\operatorname{sen} l_1\, dA_2 = \operatorname{sen} A_3\, dl_2 - \cos l_1 \operatorname{sen} A_2\, dl_3 - \operatorname{sen} l_2 \cos A_3\, dl_1$.

3. Resolución de triángulos esféricos

3.1. Resolución de triángulos esféricos rectángulos

Sustituyendo los valores de las funciones trigonométricas del ángulo recto en las fórmulas obtenidas en el capítulo anterior se obtendrán las correspondientes expresiones que permiten resolver los triángulos esféricos rectángulos. Sin perdida de generalidad supondremos $A_1 = 90^{\text{o}}$.

Proposición 3.1 *En todo triángulo esférico rectángulo se verifican las siguientes relaciones:*

i) $\cos l_1 = \cos l_2 \cos l_3$

ii) $\operatorname{sen} l_2 = \operatorname{sen} l_1 \operatorname{sen} A_2$

iii) $\tan l_2 = \tan l_1 \cos A_3$

iv) $\tan l_2 = \operatorname{sen} l_3 \tan A_2$

(v) $\cos l_1 = \cot A_2 \cot A_3$

(vi) $\cos A_2 = \operatorname{sen} A_3 \cos l_2$

Como en todo triángulo esférico rectángulo existe siempre un elemento conocido a priori, el ángulo recto, será suficiente que conozcamos dos de los cinco elementos restantes para que el triángulo quede determinado por completo.

Las combinaciones esencialmente distintas a que esos cinco elementos darán lugar vienen dadas por el conocimiento de la hipotenusa y un cateto; o los dos catetos; o la hipotenusa y un ángulo oblicuo; o un cateto y el ángulo oblicuo adyacente; dos ángulos oblicuos; o, finalmente, un cateto y el ángulo oblicuo opuesto.

Corolario 3.1 *En todo triángulo esférico rectángulo el número de lados superiores a* 90° *es siempre par; esto es, o son los tres lados menores que* 90°*, o tan solo uno de ellos lo es.*

Demostración. Pueden ocurrir los siguientes casos:

1. Si $l_1 < 90^{\text{o}}$ entonces $\cos l_1 > 0$ y como $\cos l_1 = \cos l_2 \cos l_3$ debe verificarse que: $\{\cos l_2 > 0, \cos l_3 > 0\}$ o $\{\cos l_2 < 0, \cos l_3 < 0\}$. Luego $\{l_2, l_3\} < 90^{\text{o}}$ o $\{l_2, l_3\} > 90^{\text{o}}$.
2. Si $l_1 > 90^{\text{o}}$, entonces $\cos l_1 < 0$ y de forma análoga al caso anterior debe verificarse que: $\{\cos l_2 > 0, \cos l_3 < 0\}$ o $\{\cos l_2 < 0, \cos l_3 > 0\}$, y consecuentemente $\{l_2 < 90^{\text{o}}, l_3 > 90^{\text{o}}\}$ o $\{l_2 > 90^{\text{o}}, l_3 < 90^{\text{o}}\}$.

Corolario 3.2 *En todo triángulo esférico rectángulo, cada cateto y su ángulo*

opuesto son de la misma especie; esto es, o los dos son agudos, o los dos obtusos.

Demostración. En las ecuaciones $\tan l_2 = \operatorname{sen} l_3 \tan A_2$ y $\tan l_3 = \operatorname{sen} l_2 \tan A_3$, tanto el $\operatorname{sen} l_2$ como el $\operatorname{sen} l_3$ son siempre positivos, luego $sig(\tan l_2) = sig(\tan A_2)$ y $sig(\tan l_3) = sig(\tan A_3)$, con lo cual, o ambos son agudos o ambos son obtusos.

De igual modo, se podría haber demostrado a partir de las ecuaciones

$$\cos A_2 = \operatorname{sen} A_3 \cos l_2 \ \text{ y } \ \cos A_3 = \operatorname{sen} A_2 \cos l_3,$$

pues en ellas $\operatorname{sen} A_2$ y $\operatorname{sen} A_3$ son siempre positivos; y por tanto $sig(\cos l_2) = sig(\cos A_2)$ y $sig(\cos l_3) = sig(\cos A_3)$.

Si el triángulo esférico tiene dos ángulos rectos, los lados opuestos son iguales a 90º, y el tercer ángulo es igual al tercer lado; y si el triángulo es trirrectángulo, los tres lados son iguales a 90º. En ninguno de ambos casos habría problema que resolver.

3.1.1. Pentágono de Neper

La frecuencia con que se utilizan las fórmulas relativas a los triángulos rectángulos ha hecho que se hayan buscado diversas reglas mnemotécnicas que permitan recordarlas u obtenerlas con suma sencillez. De entre todas ellas, la utilizada con mayor frecuencia es el denominado Pentágono de Neper que consiste en situar en cada uno de los vértices de un pentágono, según el orden que se indica, los elementos siguientes:

$$l_1 \qquad A_2 \qquad 90^o - l_3 \qquad 90^o - l_2 \qquad A_3$$

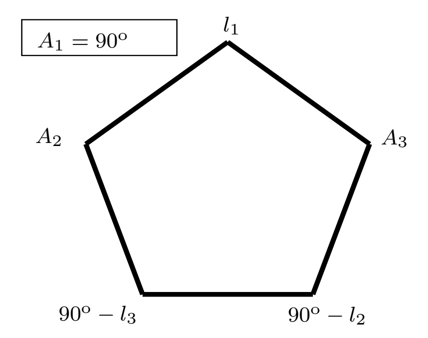


Figura 3.1: Pentágono de Neper para triángulos esféricos rectángulos

Dados tres elementos podrá ocurrir que sean consecutivos o que uno de ellos esté separado de los otros dos. Por ello, únicamente serán suficientes para obtener todas las fórmulas anteriores, las reglas siguientes:

Regla 1 *El coseno de un elemento cualquiera es igual al producto de los senos de los elementos opuestos.*

Regla 2 *El coseno de un elemento cualquiera es igual al producto de las cotangentes de los elementos adyacentes.*

A continuación se analizarán dos posibles situaciones dejándose el resto como ejercicio para el lector.

1. *Resolución conociendo la hipotenusa y un cateto*

Supongamos que $A_1 = 90^{\circ}$ y que los datos son l_1 y, por ejemplo, l_2. Para resolver el triángulo procedemos como sigue:

Del Pentágono de Neper se obtienen las expresiones:

$$\begin{aligned} \cos l_1 &= \operatorname{sen}(90^{\circ} - l_2)\ \operatorname{sen}(90^{\circ} - l_3), \\ \cos(90^{\circ} - l_2) &= \operatorname{sen} l_1\ \operatorname{sen} A_2, \\ \cos A_3 &= \cot l_1\ \cot(90^{\circ} - l_2), \end{aligned}$$

luego

$$\cos l_3 = \frac{\cos l_1}{\cos l_2}, \quad \operatorname{sen} A_2 = \frac{\operatorname{sen} l_2}{\operatorname{sen} l_1}, \quad \cos A_3 = \frac{\tan l_2}{\tan l_1}. \tag{12}$$

Al proceder de un coseno, estas expresiones proporcionan sin ambigüedad los valores de l_3 y A_3. El valor del ángulo A_2 procede de un seno y consecuentemente, podría pertenecer al primer o segundo cuadrante, pero teniendo en cuenta que ha de ser de la misma especia que el lado l_2, agudos u obtusos, dicha ambigüedad no existe.

Proposición 3.2 *La condición necesaria y suficiente para que este caso tenga solución es que el valor de la hipotenusa esté comprendido entre el valor del cateto y el suplementario de éste.*

Demostración. Para que el problema tenga solución es preciso que cada una de las razones de (12) sea en valor absoluto menor que la unidad. Así, por ejemplo,

$$\operatorname{sen} A_2 = \frac{\operatorname{sen} l_2}{\operatorname{sen} l_1} < 1 \Rightarrow \operatorname{sen} l_2 < \operatorname{sen} l_1.$$

Teniendo en cuenta los valores relativos de l_1 y l_2, se cumplirá que

$$l_1 < 90^{\circ} \quad \begin{cases} l_2 < 90^{\circ} \Rightarrow l_2 < l_1, \\ l_2 > 90^{\circ} \Rightarrow l_1 > 180^{\circ} - l_2. \end{cases}$$

$$l_1 > 90^{\circ} \quad \begin{cases} l_2 < 90^{\circ} \Rightarrow l_1 < 180^{\circ} - l_2, \\ l_2 > 90^{\circ} \Rightarrow l_1 < l_2. \end{cases}$$

Y queda así demostrada la proposición que se plantea. El mismo resultado se obtendría considerando cualquiera de las otras dos expresiones de (12).

Para comprobar la validez de los resultados obtenidos en este caso, se puede utilizar la expresión $\cos A_3 = \cos l_3 \ \operatorname{sen} A_2$.

2. *Resolución conociendo un cateto y el ángulo oblicuo opuesto*

Como en el caso anterior consideramos que $A_1 = 90^{\text{o}}$. Sean l_2 y A_2 el cateto y el ángulo oblicuo opuesto.

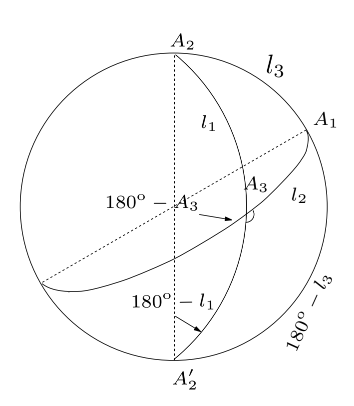


Figura 3.2

Del Pentágono de Neper se obtienen las expresiones:

$$\begin{aligned}
\cos(90^{\text{o}} - l_2) &= \operatorname{sen} l_1 \ \operatorname{sen} A_2, \\
\cos(90^{\text{o}} - l_3) &= \cot A_2 \ \cot(90^{\text{o}} - l_2), \\
\cos A_2 &= \operatorname{sen} A_3 \ \operatorname{sen}(90^{\text{o}} - l_2),
\end{aligned}$$

luego

$$\operatorname{sen} l_1 = \frac{\operatorname{sen} l_2}{\operatorname{sen} A_2}, \quad \operatorname{sen} l_1 = \cot A_2 \ \tan l_2, \quad \operatorname{sen} A_3 = \frac{\cos A_2}{\cos l_2}. \tag{13}$$

Como el lado l_2 y el ángulo A_2 han de ser de la misma especie, los segundos miembros de las igualdades (13), proporcionarán siempre un valor positivo. Por tanto, las incógnitas admitirán dos valores suplementarios. Es preciso, pues, poder conocer en qué casos se hallarán los valores, y cuáles de los hallados satisfacen las condiciones del problema.

Las distintas posibilidades que pueden ocurrir son:

a) Si $l_2 = A_2$ entonces $\operatorname{sen} l_1 = \operatorname{sen} l_3 = \operatorname{sen} A_3 = 1$. Luego:

$$l_1 = 90^{\text{o}}, \quad l_3 = 90^{\text{o}}, \quad A_3 = 90^{\text{o}}.$$

Y, consecuentemente, el triángulo esférico sería birrectángulo. Un caso particular se origina cuando $l_2 = 90^{\text{o}}$, pues, para que las ecuaciones (13) admitan solución, necesariamente, $l_2 = A_2 = 90^{\text{o}}$ y el triángulo esférico será trirrectángulo.

b) Si $l_2 \neq A_2$, podrá ser $l_2 < 90^{\text{o}}$ o $l_2 > 90^{\text{o}}$.

1) Si $l_2 < 90^{\text{o}}$ entonces $A_2 < 90^{\text{o}}$. Para que $\operatorname{sen} l_1$, $\operatorname{sen} l_3$ y $\operatorname{sen} A_3$ sean menores que la unidad, de las ecuaciones (13) se deduce que

$$\operatorname{sen} l_2 < \operatorname{sen} A_2, \quad \tan l_2 < \tan A_2, \quad \cos A_2 < \cos l_2,$$

de donde se concluye que existirá solución cuando $l_2 < A_2$.

Por otra parte, de la expresión $\cos l_1 = \cos l_2 \cos l_3$ y teniendo en cuenta que ahora $\cos l_2 > 0$, se deduce que l_1 y l_3 son de la misma especie; y como l_3 y A_3, también han de serlo, resulta que las tres incógnitas son de la misma especie. Luego, las dos soluciones vienen dadas por $(l_2, A_2, l_1^1, l_3^1, A_3^1)$ y $(l_2, A_2, l_1^2, l_3^2, A_3^2)$, siendo (l_1^1, l_3^1, A_3^1) y (l_1^2, l_3^2, A_3^2) los valores agudos y obtusos obtenidos de las incógnitas, respectivamente. Así,

$$l_1^2 = 180^{\text{o}} - l_1^1, \quad l_3^2 = 180^{\text{o}} - l_3^1, \quad A_3^2 = 180^{\text{o}} - A_3^1.$$

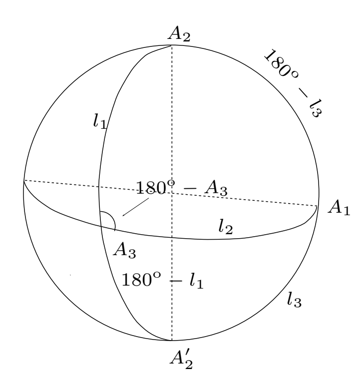


Figura 3.3

2) Si $l_2 > 90^o$ entonces $A_2 > 90^o$. En este caso existirá solución cuando $l_2 > A_2$.

Puesto que $\cos l_1 = \cos l_2 \cos l_3$ y $\cos l_2 < 0$, los lados l_1 y l_3 serán de distinta especie. Y como l_3 y A_3 son de la misma especie, las dos soluciones posibles son: $(l_2, A_2, l_1^1, l_3^1, A_3^1)$ y $(l_2, A_2, l_1^2, l_3^2, A_3^2)$, donde, ahora, (l_1^1, l_3^1, A_3^1) son ángulos agudos y y (l_1^2, l_3^2, A_3^2) obtusos, verificándose:

$$l_1^2 = 180^o - l_1^1, \quad l_3^1 = 180^o - l_3^2, \quad A_3^1 = 180^o - A_3^2.$$

Según lo anterior podemos concluir que si el problema tiene solución, hay dos triángulos esféricos que satisfacen las condiciones del mismo, y que, unidos forman un huso de ángulo B. Para comprobar la validez de los resultados obtenidos se puede utilizar la expresión $\operatorname{sen} l_3 = \operatorname{sen} l_1 \operatorname{sen} A_3$.

3.2. Resolución de triángulos esféricos rectiláteros

Para resolver un triángulo esférico rectilátero bastará tener en cuenta que su triángulo polar es un triángulo esférico rectángulo. Este triángulo se resuelve utilizando los casos expuestos en el caso anterior y, conocidos los elementos del polar, no hay más que tomar los ángulos suplementarios, cambiando las denominaciones de los lados por los ángulos y viceversa.

Otra forma de resolver los triángulos esféricos rectiláteros consiste en sustituir el valor del lado recto en las fórmulas generales.

Proposición 3.3 *En todo triángulo esférico rectilátero ($l_1 = 90^o$) se verifica que:*

i) $\cos A_1 = -\cos A_3 \cos A_2$.

ii) $\operatorname{sen} A_2 = \operatorname{sen} A_1 \operatorname{sen} l_2$, $\operatorname{sen} A_3 = \operatorname{sen} A_1 \operatorname{sen} l_3$.

iii) $\tan A_2 = -\tan A_1 \cos l_3$, $\tan A_3 = -\tan A_1 \cos l_2$.

iv) $\tan A_2 = \tan l_2 \operatorname{sen} A_3$, $\tan A_3 = \tan l_3 \operatorname{sen} A_2$.

v) $\cos A_1 = -\cot l_2 \cot l_3$.

vi) $\cos l_2 = \operatorname{sen} l_3 \cos A_2$, $\cos l_3 = \operatorname{sen} l_2 \cos A_3$.

Al igual que en el caso anterior, el Pentágono de Neper es la regla mnemotécnica utilizada con mayor asiduidad en la resolución de triángulos esféricos rectiláteros.

Las diferencias principales con el caso anterior radican tanto en los elementos a situar en los vértices de dicho pentágono como en el orden en que éstos han de situarse. Así,

$$180^o - A_1 \qquad 180^o - l_2 \qquad A_3 - 90^o \qquad A_2 - 90^o \qquad 180^o - l_3$$

Las reglas que se aplican en este pentágono son las mismas que en el caso anterior; esto es:

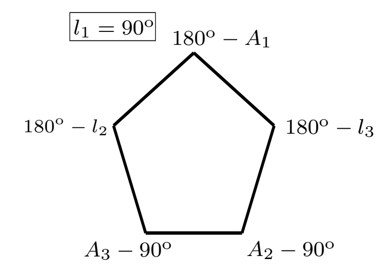


Figura 3.4: Pentágono de Neper para triángulos esféricos rectiláteros

Regla 1 *El coseno de un elemento cualquiera es igual al producto de los senos de los elementos opuestos.*

Regla 2 *El coseno de un elemento cualquiera es igual al producto de las cotangentes de los elementos adyacentes.*

La resolución de triángulos esféricos rectiláteros dependerá de los elementos conocidos y los elementos a calcular. Así, podemos distinguir en función de los elementos conocidos, los siguientes casos: el ángulo opuesto al lado recto y un ángulo adyacente a dicho lado, los dos ángulos adyacentes al lado recto, el ángulo opuesto al lado recto y un lado oblicuo, un ángulo adyacente al lado recto y el lado oblicuo adyacente a dicho ángulo, los dos lados oblicuos, un ángulo adyacente al lado recto y el lado oblicuo opuesto a dicho ángulo. Este último caso es el único que admite dos posibles soluciones.

3.3. Resolución de triángulos esféricos oblicuángulos

Entenderemos por triángulos esféricos oblicuángulos aquellos que no tienen ningún ángulo recto. Cuando alguno de sus lados lo sea, se resuelve aplicando los métodos explicados en el tema anterior.

En general, un triángulo esférico oblicuángulo puede resolverse, de forma directa, mediante la aplicación de las expresiones obtenidas en el tercer tema, u otras deducidas a partir de éstas, o también, resolviendo los dos triángulos esféricos rectángulos que se obtienen al trazar desde uno de sus vértices el arco de círculo máximo perpendicular al lado opuesto, denominado perpendículo.

Cuando el triángulo oblicuo sea isósceles, o si entre los elementos dados existen dos lados o dos ángulos suplementarios, no será necesario resolver los dos triángulos rectángulos obtenidos al trazar el perpendículo. Bastará con resolver uno de ellos, pues a partir de los elementos calculados de éste se obtienen, de forma inmediata, los elementos del propuesto.

En cualquier caso, para la resolución de un triángulo esférico será suficiente conocer tres de sus elementos: los tres lados, los tres ángulos, dos lados y el ángulo comprendido, un lado y los ángulos adyacentes, dos lados y el ángulo opuesto a

uno de ellos, o dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos. En realidad, estos seis casos pueden reducirse a tres al considerar el triángulo polar al dado.

Una consecuencia inmediata de la dependencia entre los distintos elementos de un triángulo es que una pequeña variación en cualquiera de los elementos conocidos producirá una variación en los elementos desconocidos.

3.3.1. Método del perpendículo

Este método se basa en la descomposición del triángulo esférico propuesto en dos triángulos esféricos rectángulos. Para ello, consideramos el arco de círculo máximo que pasa por uno de los vértices del triángulo y perpendicular al lado opuesto a dicho ángulo. A este arco, que denotaremos ρ, lo denominamos perpendículo y divide al lado opuesto en dos arcos que son catetos de cada triángulo rectángulo obtenido y que forman, junto al propio perpendículo, ángulo recto.

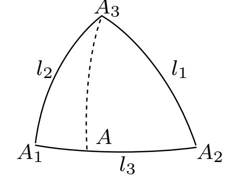


Figura 3.5

Sea A el punto de intersección del perpendículo ρ con el lado sobre el que proyectamos. Tendremos por construcción que los triángulos A_1A_3A y A_2AA_3 son rectángulos, por lo que los ángulos A_1 y $\angle(A_1A_3A)$ deben ser de la misma especie, al igual que ocurre con A_2 y $\angle(A_2A_3A)$. Esto implica que el perpendículo ρ puede estar en el interior o en el exterior del triángulo que buscamos, según que A_1 o A_2 sean de la misma especie o no.

Si el valor del perpendículo es conocido, y teniendo en cuenta que la suma de los arcos anteriores es igual al lado opuesto, entonces la resolución es inmediata.

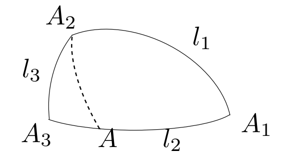
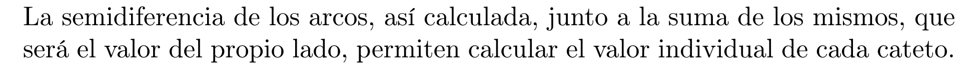


Figura 3.6

Si el valor del perpendículo es desconocido, aplicando el Pentágono de Neper a ambos triángulos rectángulos y operando apropiadamente, se obtiene una expresión de la cotangente de la semidiferencia de dichos catetos, en función de las cotangentes de la semisuma y de la semidiferencia de los otros dos lados, y de la tangente de la semisuma de dichos arcos.



La semidiferencia de los arcos, así calculada, junto a la suma de los mismos, que será el valor del propio lado, permiten calcular el valor individual de cada cateto.

El método termina resolviendo directamente ambos triángulos esféricos rectángulos, de donde se obtienen los valores de los ángulos del triángulo propuesto.

Veamos a continuación la aplicación de este método al caso particular de la resolución de un triángulo esférico oblicuángulo isósceles.

Supongamos que los lados y ángulos iguales del triángulo isósceles son $l_3 = l_2$, $A_3 = A_2$. Si trazamos el perpendículo A_1A, se obtienen dos triángulos rectángulos, $A = 90^o$, que tienen sus elementos homólogos iguales.

Resolviendo uno de ellos, en el que siempre serán conocidos dos elementos, tendremos resuelto el triángulo oblicuángulo dado, pues la intersección del perpendículo con el lado opuesto divide dicho lado en dos partes iguales.

Ocurrirá igual con el ángulo correspondiente al vértice de donde parte el per-

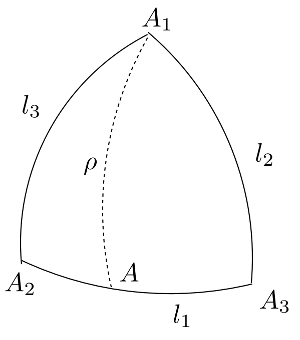


Figura 3.7

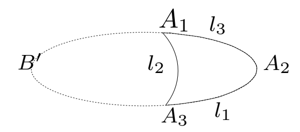


Figura 3.8

pendículo. Es decir,

$$A_3A = A_2A = \frac{l_1}{2}, \qquad \angle(A_2A_1A) = \angle(AA_1A_3) = \frac{A_1}{2}, \qquad A = 90^{\text{o}}.$$

Si, por ejemplo, en el triángulo dado se conocen los tres lados, dos de los cuales son iguales necesariamente, en cada uno de los triángulos rectángulos que se forman conoceremos dos lados, uno será la mitad del lado desigual y el otro el lado que define el triángulo isósceles.

Este caso se utiliza para la resolución de triángulos esféricos oblicuángulos cuando entre los elementos dados existen dos lados o dos ángulos suplementarios.

Si entre los datos hay dos lados suplementarios, $l_1 + l_2 = 180^{\text{o}}$, se formará un triángulo, $A_1A_2'A_3$, que completa con el triángulo dado el huso de ángulo A_2. Este triángulo es isósceles, pues $A_2' = 180^{\text{o}} - l_1 = l_2$.

Por ser isósceles, el triángulo $A_1A_j'A_3$ se resuelve según lo expuesto antes, pudiendo utilizar los datos obtenidos para calcular los del triángulo propuesto.

De igual manera se resolvería en el caso de un triángulo oblicuángulo cuando entre los datos hay dos ángulos suplementarios, $A_1 + A_2 = 180^{\text{o}}$, pues se cumplirá que

$$\angle(A_2'A_1A_3) = 180^{\text{o}} - A_1 = A_2',$$

y el triángulo $A_1A_j'A_3$ será, por tanto, isósceles.

3.3.2. Resolución conocidos los tres lados

Datos: l_1**,** l_2 **y** l_3**. Incógnitas:** A_1**,** A_2 **y** A_3**.**

En este caso se demuestra que, siempre que los tres lados formen un triángulo esférico, existe solución única. Podemos aplicar básicamente dos métodos de resolución:

1. Métodos directos:

   a) Aplicando la 1[a] Fórmula de Bessel a cada lado y despejando el coseno de cada ángulo se tiene:

   $$\cos A_1 = \frac{\cos l_1 - \cos l_2 \, \cos l_3}{\operatorname{sen} l_2 \, \operatorname{sen} l_3},$$

   Salvo que el denominador sea próximo a cero, la expresión anterior demuestra directamente la existencia y unicidad de solución del problema.

   b) Aplicando las Fórmulas de Borda, que proporcionan la tangente del ángulo mitad en función del semiperímetro y las diferencias de éste con cada uno de los lados dados o en función del coseno del lado opuesto y de los cosenos de la diferencia y la suma de los otros dos lados. Dichas expresiones vienen dadas por:

   $$\tan\frac{A_1}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-l_2)\operatorname{sen}(p-l_3)}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-l_1)}} = \sqrt{\frac{\cos(l_3-l_2) - \cos l_1}{\cos l_1 - \cos(l_2+l_3)}}. \qquad (14)$$

En esta expresión no se consideran los valores negativos de la raíz cuadrada puesto que cada ángulo mitad será menor de 90º y, consecuentemente, su tangente será siempre positiva.

Para demostrar la existencia y unicidad de solución en este método consideramos las primeras igualdades de la expresión (14), función del semiperímetro y sus diferencias con los lados, en donde habrá que estudiar el signo de los senos inmiscuidos. Si con los datos dados el triángulo existe, entonces ha de verificarse que

$$l_1 + l_2 + l_3 < 360^{\text{o}}, \quad y \qquad \left\{ \begin{array}{l} l_1 < l_2 + l_3, \\ l_1 > l_2 - l_3. \end{array} \right.$$

luego $2p = l_1 + l_2 + l_3 < 360^{\text{o}} \Rightarrow p < 180^{\text{o}} \Rightarrow \operatorname{sen} p > 0$.

Por otra parte

$$\begin{aligned} l_1 + l_2 + l_3 < 360^{\text{o}} &\Rightarrow l_2 + l_3 - l_1 < 360^{\text{o}} \\ \Rightarrow \frac{l_2 + l_3 - l_1}{2} = p - l_1 < 180^{\text{o}} &\Rightarrow \operatorname{sen}(p - l_1) > 0. \end{aligned}$$

De igual modo se cumple que $\operatorname{sen}(p - l_2) > 0$ y $\operatorname{sen}(p - l_3) > 0$. Por tanto, siempre que los lados formen un triángulo esférico existirá una única solución del problema.

2. Método de perpendículo

El triángulo esférico también puede resolverse por descomposición en dos triángulos rectángulos obtenidos mediante el perpendículo trazado desde uno cualquiera de sus vértices.

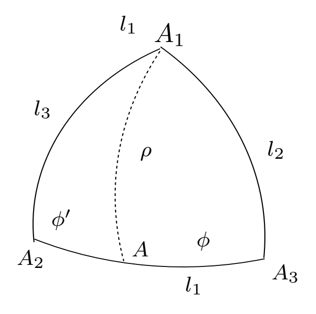
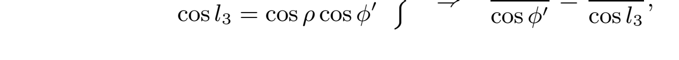


Figura 3.9

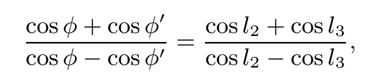
Sea ρ el perpendículo trazado desde el vértice A_1 del triángulo esférico dado $A_1A_2A_3$, que interseca al lado l_1 en el punto A.

Si ρ es desconocido, entonces, aplicando el pentágono de Neper a los triángulos AA_1A_3 y AA_1A_2 obtenemos:



$$\left. \begin{array}{r} \cos l_2 = \cos \rho \cos \phi \\ \cos l_3 = \cos \rho \cos \phi' \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos \phi}{\cos \phi'} = \frac{\cos l_2}{\cos l_3},$$

observándose en esta expresión que ϕ y ϕ' serán de la misma especie, o de especie contraria, cuando lo sean l_2 y l_3. Asimismo, se deduce que



$$\frac{\cos \phi + \cos \phi'}{\cos \phi - \cos \phi'} = \frac{\cos l_2 + \cos l_3}{\cos l_2 - \cos l_3},$$

luego

$$\frac{2 \cos \dfrac{\phi + \phi'}{2} \cos \dfrac{\phi - \phi'}{2}}{-2 \operatorname{sen} \dfrac{\phi + \phi'}{2} \operatorname{sen} \dfrac{\phi - \phi'}{2}} = \frac{2 \cos \dfrac{l_2 + l_3}{2} \cos \dfrac{l_2 - l_3}{2}}{-2 \operatorname{sen} \dfrac{l_2 + l_3}{2} \operatorname{sen} \dfrac{l_2 - l_3}{2}},$$

de donde

$$\cot \frac{\phi - \phi'}{2} = \cot \frac{l_2 + l_3}{2} \cot \frac{l_2 - l_3}{2} \tan \frac{\phi + \phi'}{2}.$$

Y como $\phi + \phi' = l_1$, obtendremos los valores respectivos de ϕ y ϕ', con lo que podremos resolver los triángulos rectángulos AA_1A_2 y AA_1A_3, y consecuentemente el problema planteado.

Análogamente se resolvería cuando al trazar el perpendículo se cumpliera

$$|\phi - \phi'| = l_1.$$

Para comprobar los resultados obtenidos pueden utilizarse la 2ª fórmula de Bessel o bien propiedades de los triángulos esféricos.

3.3.3. Resolución conocidos los tres ángulos

Datos: A_1**,** A_2 **y** A_3**. Incógnitas:** l_1**,** l_2 **y** l_3**.**

De nuevo se demuestra que la solución, si existe, es única. Para la resolución de este caso se pueden aplicar los siguientes casos:

1. Métodos directos:

   a) Aplicar la fórmula análoga a la 1ª fórmula de Bessel para cada uno de los ángulos, y despejar el coseno de cada lado:

   $$\cos l_1 = \frac{\cos A_1 + \cos A_2 \, \cos A_3}{\operatorname{sen} A_2 \, \operatorname{sen} A_3}.$$

   Análogamente al caso anterior, esta expresión proporciona una única solución salvo que los denominadores respectivos sean próximos a cero.

   b) Aplicar las Fórmulas de Borda que proporcionan la tangente de un semilado en función del semiexceso esférico, y las diferencias respectivas de los ángulos con dicho valor, o también las fórmulas, deducidas a partir de éstas, en función del coseno del ángulo opuesto y de los cosenos de la suma y diferencia de los otros dos ángulos. Su expresión sincretizada es:

   $$\tan \frac{l_1}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} E \operatorname{sen}(A_1 - E)}{\operatorname{sen}(A_2 - E) \operatorname{sen}(A_3 - E)}} = \sqrt{-\frac{\cos(A_2 + A_3) + \cos A_1}{\cos(A_2 - A_3) + \cos A_1}}, \tag{15}$$

   siendo $2E = A_1 + A_2 + A_3 - 180^o$.

   Para demostrar la existencia de la solución, partimos de las condiciones que deben verificar los tres ángulos dados para que formen un triángulo esférico. Esto es:

   $$A_1 < 180^o, A_2 < 180^o, A_3 < 180^o,$$
   $$180^o < A_1 + A_2 + A_3 < 540^o,$$
   $$A_1 + 180^o > A_2 + A_3.$$

   Si consideramos la primera igualdad de (15), habrá que estudiar el signo de los senos inmiscuidos en el radicando, asegurando que éste siempre sea positivo.

De las propiedades anteriores y de la definición de semiexceso esférico, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} 180^{\circ} < A_1 + A_2 + A_3 < 540^{\circ} \\ 2E = A_1 + A_2 + A_3 - 180^{\circ} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 180^{\circ} < 2E + 180^{\circ} < 540^{\circ}.$$

Así pues, $0^{\circ} < E < 180^{\circ} \Rightarrow \operatorname{sen} E > 0$. Por otra parte,

$$\begin{array}{l} A_1 + 180^{\circ} > A_2 + A_3 \Rightarrow 180^{\circ} > A_2 + A_3 - A_1 \\ \Rightarrow 180^{\circ} > A_2 + A_3 + A_1 - 2A_1 = 2E + 180^{\circ} - 2A_1 \\ \Rightarrow 0^{\circ} > 2E - 2A_1 \Rightarrow A_1 > E \\ \Rightarrow A_1 - E > 0^{\circ}, \end{array}$$

y como $A_1 < 180^{\circ}$, entonces $A_1 - E < 180^{\circ}$. Luego $\operatorname{sen}(A_1 - E) > 0$.

De igual modo se demuestra que $\operatorname{sen}(A_2 - E) > 0$ y $\operatorname{sen}(A_3 - E) > 0$.

2. Método del perpendículo

   En este caso ϕ y ϕ' serán los ángulos en que se divide el ángulo desde el cual se traza el perpendículo.

3. Considerar el triángulo polar del dado

   Estaríamos en un problema del tipo anterior. Resolviendo el polar obtendríamos sus ángulos, que serían suplementarios de los lados del triángulo dado.

Para comprobar los resultados obtenidos se puede utilizar la 2ª fórmula de Bessel o las propiedades de los triángulos esféricos.

3.3.4. Resolución conocidos dos lados y el ángulo comprendido

Datos: l_1**,** l_2 **y** A_3**. Incógnitas:** A_1**,** A_2 **y** l_3**.**

En caso de existir solución del problema, también se puede demostrar su unicidad. En este caso se pueden aplicar los siguiente métodos:

1. Métodos directos:

   a) Aplicando la 1ª fórmula de Bessel se obtiene directamente, y de forma única, el valor del lado desconocido. A partir de aquí estaríamos en la resolución de un triángulo esférico del cual se conocen los tres lados.

   b) Aplicar las Analogías de Neper que proporcionan los valores de $A_1 - A_2$ y $A_1 + A_2$, obteniéndose así, un sistema compatible y determinado:

   $$\tan\frac{A_1 + A_2}{2} = \cot\frac{A_3}{2}\,\frac{\cos\frac{l_1 - l_2}{2}}{\cos\frac{l_1 + l_2}{2}}, \quad \tan\frac{A_1 - A_2}{2} = \cot\frac{A_3}{2}\,\frac{\operatorname{sen}\frac{l_1 - l_2}{2}}{\operatorname{sen}\frac{l_1 + l_2}{2}}.$$

   El lado l_3 se calcula, una vez conocidos los valores de la suma y de la diferencia de los ángulos A_1 y A_2, mediante una de las expresiones siguientes, también pertenecientes al grupo de las Analogías de Neper:

   $$\tan\frac{l_3}{2} = \tan\frac{l_1 - l_2}{2}\,\frac{\operatorname{sen}\frac{A_1 + A_2}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A_1 - A_2}{2}}, \quad \tan\frac{l_3}{2} = \tan\frac{l_1 + l_2}{2}\,\frac{\cos\frac{A_1 + A_2}{2}}{\cos\frac{A_1 - A_2}{2}}.$$

o bien, aplicando directamente la 1ª fórmula de Bessel.

Al estar los datos comprendidos entre 0° y 180°, las fórmulas que se han empleado demuestran que el problema admite solución única.

2. Método del perpendículo:

Si trazamos desde el vértice A_2 el perpendículo ρ al lado l_2, se obtienen los triángulos rectángulos A_1A_2A y A_1A_3A, donde A es la intersección del perpendículo con el lado l_2. El ángulo A es recto y además se cumple que

$$\rho = A_2A, \quad A_1A = l_2 - \phi, \quad AA_3 = \phi.$$

En el triángulo A_1A_2A se tiene

$$\tan\rho = \operatorname{sen}(l_2 - \phi)\tan A_1 \Rightarrow \tan A_1 = \frac{\tan\rho}{\operatorname{sen}(l_2 - \phi)}, \tag{16}$$

del triángulo A_2A_3A se obtiene $\tan\rho = \operatorname{sen}\phi\tan A_3$, que sustituida en (16) proporciona

$$\tan A_1 = \frac{\operatorname{sen}\phi\tan A_3}{\operatorname{sen}(l_2 - \phi)}.$$

El correspondiente valor de ϕ se obtiene del triángulo A_2A_3A mediante

$$\tan\phi = \tan l_1 \cos A_3.$$

Para hallar el lado l_3, del triángulo A_1A_2A, se obtiene $\cos l_3 = \cos(l_2 - \phi)\cos\rho$, y del triángulo A_1A_3A, $\cos\rho = \frac{\cos l_1}{\cos\phi}$. Por tanto

$$\cos l_3 = \cos(l_2 - \phi)\frac{\cos l_1}{\cos\phi}.$$

Para calcular el ángulo A_2, se realiza un proceso análogo al realizado para el ángulo A_1, obteniéndose que

$$\tan A_2 = \frac{\operatorname{sen}\omega\tan A_3}{\operatorname{sen}(l_1 - \omega)},$$

siendo $\tan\omega = \tan l_2 \cos A_3$.

Al igual que en los casos anteriores, los resultados obtenidos se comprueban utilizando la 2ª fórmula de Bessel, o utilizando propiedades de los triángulos esféricos.

3.3.5. Resolución conocidos un lado y los ángulos adyacentes

Datos: l_3, A_1 y A_2. Incógnitas: l_1, l_2 y A_3.

Se pueden aplicar los siguientes métodos:

1. Métodos directos:

a) El ángulo desconocido es determinado de forma única aplicando la fórmula análoga a la 1ª fórmula de Bessel para los ángulos. Así

$$\cos A_3 = -\cos A_1 \cos A_2 + \operatorname{sen} A_1 \operatorname{sen} A_2 \cos l_3.$$

Con este valor calculado, y aplicando la 2ª fórmula de Bessel,

$$\frac{\operatorname{sen} l_3}{\operatorname{sen} A_3} = \frac{\operatorname{sen} l_1}{\operatorname{sen} A_1} = \frac{\operatorname{sen} l_2}{\operatorname{sen} A_2},$$

se obtendrían los valores de los lados desconocidos que, al venir dados por la función seno, presentarían la ambigüedad de pertenecer al primer o segundo cuadrante. Esta ambigüedad puede evitarse aplicando la expresión inicial a los ángulos conocidos, y de aquí

$$\cos l_1 = \frac{\cos A_1 + \cos A_2 \cos A_3}{\operatorname{sen} A_2 \operatorname{sen} A_3}.$$

Los valores así calculados están unívocamente determinados, exceptuando el caso en que los denominadores sean próximos a cero. En esta situación la expresión anterior no es válida para resolver el problema.

b) Los valores de los lados desconocidos se pueden determinar aplicando las Analogías de Neper siguientes:

$$\tan \frac{l_1 + l_2}{2} = \tan \frac{l_3}{2} \frac{\cos \frac{A_1 - A_2}{2}}{\cos \frac{A_1 + A_2}{2}}, \quad \tan \frac{l_1 - l_2}{2} = \tan \frac{l_3}{2} \frac{\operatorname{sen} \frac{A_1 - A_2}{2}}{\operatorname{sen} \frac{A_1 + A_2}{2}},$$

y el ángulo A_3 por una de las dos expresiones siguientes:

$$\cot \frac{A_3}{2} = \tan \frac{A_1 + A_2}{2} \frac{\cos \frac{l_1 + l_2}{2}}{\cos \frac{l_1 - l_2}{2}}, \quad \cot \frac{A_3}{2} = \tan \frac{A_1 - A_2}{2} \frac{\operatorname{sen} \frac{l_1 + l_2}{2}}{\operatorname{sen} \frac{l_1 - l_2}{2}}.$$

Dado que los lados y ángulos que intervienen en las fórmulas anteriores están comprendidos entre 0° y 180°, este problema siempre tiene solución única.

2. Análogamente al caso anterior se pueden aplicar el método del perpendículo o considerar el triángulo polar del dado.

3.3.6. Resolución conocidos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

Datos: l_1, l_2 y A_1. Incógnitas: l_3, A_2 y A_3.

La resolución de un triángulo en este caso presenta mayores dificultades. Entre las estrategias a utilizar podemos destacar las siguientes:

1. Método directo: El ángulo desconocido y opuesto al lado dado se obtiene aplicando la 2ª fórmula de Bessel:

$$\operatorname{sen} A_2 = \frac{\operatorname{sen} l_2}{\operatorname{sen} l_3} \operatorname{sen} A_3.$$

Obviamente, el ángulo A_2 así obtenido presenta una ambigüedad, puesto que al proceder de un seno puede pertenecer al primer o segundo cuadrante.

Para calcular el lado l_3 y el ángulo A_3, se aplican directamente las analogías

$$\cot\frac{A_3}{2}=\tan\frac{A_1+A_2}{2}\,\frac{\cos\frac{l_1+l_2}{2}}{\cos\frac{l_1-l_2}{2}},\quad \tan\frac{l_3}{2}=\tan\frac{l_1+l_2}{2}\,\frac{\cos\frac{A_1+A_2}{2}}{\cos\frac{A_1-A_2}{2}},\tag{17}$$

o también

$$\cot\frac{A_3}{2}=\tan\frac{A_1-A_2}{2}\,\frac{\operatorname{sen}\frac{l_1+l_2}{2}}{\operatorname{sen}\frac{l_1-l_2}{2}},\quad \tan\frac{l_3}{2}=\tan\frac{l_1-l_2}{2}\,\frac{\operatorname{sen}\frac{A_1+A_2}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A_1-A_2}{2}}.\tag{18}$$

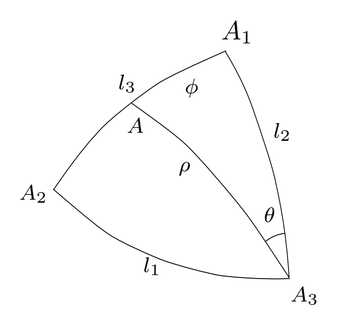


Figura 3.10

En cualquiera de los casos, la ambigüedad con que se ha obtenido el ángulo A_2 se propaga a los valores calculados de l_3 y A_3. Debido a esta situación tendremos que discernir entre los casos posibles, aplicando propiedades de los triángulos esféricos.

2. Método del perpendículo

Aun aplicando este método, el ángulo A_2 se tendrá que resolver mediante la 2ª fórmula de Bessel. Para el cálculo del lado l_3, consideramos la 1ª fórmula de Bessel

$$\begin{aligned}\cos l_1 &= \cos l_2\,\cos l_3+\operatorname{sen} l_2\,\operatorname{sen} l_3\,\cos A_1\\ &= \cos l_2\,(\cos l_3+\tan l_2\,\operatorname{sen} l_3\,\cos A_1).\end{aligned}\tag{19}$$

Sea A el punto intersección del perpendículo trazado desde el vértice A_3 al lado opuesto con dicho lado. Entonces si $\phi=A_1A$ se verifica que $\tan l_2\,\cos A_1=\tan\phi$, obteniéndose así el valor de ϕ. Sustituyendo en la ecuación (19) se obtiene

$$\cos l_1=\cos l_2\,\frac{\cos(l_3-\phi)}{\cos\phi},$$

y, por tanto

$$\cos(l_3-\phi)=\frac{\cos l_1}{\cos l_2}\,\cos\phi.$$

Para hallar el ángulo A_3, consideramos la Fórmula de las Cuatro Partes

$$\begin{aligned}\cot l_1\,\operatorname{sen} l_2 &= \cos l_2\,\cos A_3+\operatorname{sen} A_3\,\cot A_1\\ &= \cos l_2\left(\cos A_3+\operatorname{sen} A_3\,\frac{\cot A_1}{\cos l_2}\right).\end{aligned}\tag{20}$$

Sea $\theta=\angle A_1A_3A$. Entonces

$$\tan\theta=\frac{\cot A_1}{\cos l_2},\tag{21}$$

que sustituida en la ecuación (20) nos queda

$$\cot l_1\,\operatorname{sen} l_2=\cos l_3\,\frac{\cos(A_3-\theta)}{\cos\theta},$$

y, consecuentemente, $\cos(A_3 - \theta) = \cot l_1 \, \tan l_2 \, \cos\theta$.

El valor de θ se obtendría de la ecuación (21).

3. Método de la ecuación de segundo grado:

La ambigüedad existente a la hora de resolver triángulos esféricos conocidos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, nos conduce al estudio de métodos que faciliten la determinación de la existencia y unicidad de soluciones. Entre estos métodos cabe destacar el "método de la ecuación de segundo grado", que es una condición necesaria, aunque no suficiente, de existencia y unicidad. Para establecer los fundamentos del método, partiremos de la 1ª fórmula de Bessel:

$$\cos l_1 = \cos l_2 \cos l_3 + \operatorname{sen} l_2 \operatorname{sen} l_3 \cos A_1,$$

en la que si sustituimos $\cos l_3 = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 l_3}$, se tiene que

$$\operatorname{sen} l_2 \operatorname{sen} l_3 \cos A_1 - \cos l_1 = \pm \cos l_2 \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 l_3}.$$

Elevando al cuadrado, agrupando términos y sacando factor común $\operatorname{sen} l_3$, nos queda

$$\operatorname{sen}^2 l_3 \left(\cos^2 l_2 + \operatorname{sen}^2 l_2 \cos^2 A_1\right) - 2\cos l_1 \operatorname{sen} l_2 \cos A_1 \operatorname{sen} l_3 + \cos^2 l_1 - \cos^2 l_2 = 0,$$

y como $\cos^2 A_1 = 1 - \operatorname{sen}^2 A_1$, se tiene

$$\left(1 - \operatorname{sen}^2 l_2 \operatorname{sen}^2 A_1\right) \operatorname{sen}^2 l_3 - 2\cos l_1 \operatorname{sen} l_2 \cos A_1 \operatorname{sen} l_3 + \cos^2 l_1 - \cos^2 l_2 = 0 \quad (22)$$

que es una ecuación de segundo grado en $\operatorname{sen} l_3$, de la forma: $Px^2 + Qx + R = 0$.

Para que las raíces sean reales es preciso que $Q^2 - 4PR \geq 0$. Estudiemos pues esta condición.

$$\begin{array}{l} 4\operatorname{sen}^2 l_2 \cos^2 l_1 \cos^2 A_1 - 4\left(1 - \operatorname{sen}^2 l_2 \operatorname{sen}^2 A_1\right)\left(\cos^2 l_1 - \cos^2 l_2\right) \geq 0, \\ \operatorname{sen}^2 l_2 \cos^2 l_1 \cos^2 A_1 - \left(\cos^2 l_1 - \cos^2 l_2 - \operatorname{sen}^2 l_2 \cos^2 l_1 \operatorname{sen}^2 A_1 + \right. \\ \left. + \operatorname{sen}^2 l_2 \operatorname{sen}^2 A_1 \cos^2 l_2\right) \geq 0 \Leftrightarrow \\ \cos^2 l_1 \operatorname{sen}^2 l_2 + \cos^2 l_2 - \cos^2 l_1 - \operatorname{sen}^2 l_2 \operatorname{sen}^2 A_1 \cos^2 l_2 \geq 0 \Leftrightarrow \\ -\cos^2 l_2 \cos^2 l_1 + \cos^2 l_2 - \operatorname{sen}^2 l_1 \operatorname{sen}^2 A_1 \cos^2 l_2 \geq 0 \Leftrightarrow \\ \operatorname{sen}^2 l_1 \cos^2 l_2 - \operatorname{sen}^2 l_2 \operatorname{sen}^2 A_1 \cos^2 l_2 \geq 0 \Leftrightarrow \\ \operatorname{sen}^2 l_1 \cos^2 l_2 \geq \operatorname{sen}^2 l_2 \operatorname{sen}^2 A_1 \cos^2 l_2 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 l_1 \geq \operatorname{sen}^2 l_2 \operatorname{sen}^2 A_1. \end{array}$$

y como $\operatorname{sen} l_1$, $\operatorname{sen} l_2$, $\operatorname{sen} A_1$ son todos positivos, tendremos que esta desigualdad es equivalente a

$$\operatorname{sen} l_1 \geq \operatorname{sen} l_2 \operatorname{sen} A_1.$$

Para que el problema tenga dos soluciones reales, $x = \operatorname{sen} l_3 > 0$, es preciso que las dos raíces de la ecuación (22) sean positivas, y por tanto $\dfrac{R}{P} > 0$. [1] Ahora bien, como

$$P = 1 - \operatorname{sen}^2 l_2 \operatorname{sen}^2 A_1 > 0$$

[1] Si x_1 y x_2 son las soluciones reales de una ecuación de segundo grado con coeficientes reales a, b y c, entonces se cumple que:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad y \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

será necesario que $R = \cos^2 l_1 - \cos^2 l_2 > 0$, esto es:

$$(\cos l_1 + \cos l_2)\,(\cos l_1 - \cos l_2) > 0,$$

$$\left(2\cos\frac{l_1+l_2}{2}\cos\frac{l_2-l_1}{2}\right)\left(2\,\mathrm{sen}\,\frac{l_1+l_2}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{l_1-l_2}{2}\right) > 0,$$

$$\mathrm{sen}(l_1+l_2)\,\mathrm{sen}(l_2-l_1) \geq 0.$$

Consecuentemente, la condición necesaria para que el problema tenga dos soluciones será que

$$180^o \leq l_1 + l_2 < 360^o \quad \text{y} \quad l_2 < l_1 \quad \text{ó} \quad 0^o < l_1 + l_2 \leq 180^o\, y\, l_2 > l_1$$

Fuera de estos casos el problema no tendrá solución o tendrá una sola; bien porque las dos raíces de la ecuación sean complejas; bien porque obtengamos dos valores, siendo uno incompatible con los datos del problema.

Si escribimos la ecuación de segundo grado en la forma $x^2 + qx + r = 0$,

$$\mathrm{sen}^2\, l_3 - \frac{2\cos l_1\,\mathrm{sen}\, l_2 \cos A_1}{1-\mathrm{sen}^2\, l_2\,\mathrm{sen}^2\, A_1}\,\mathrm{sen}\, l_3 + \frac{\mathrm{sen}(l_1+l_2)\,\mathrm{sen}(l_2-l_1)}{1-\mathrm{sen}^2\, l_2\,\mathrm{sen}^2\, A_1} = 0,$$

se facilita el estudio del número de soluciones del problema en función de los signos de q y r, teniendo en cuenta que las raíces reales y positivas son las únicas soluciones posibles para la incógnita $x = \mathrm{sen}\, l_3$.

Puesto que $1 - \mathrm{sen}^2\, l_2\,\mathrm{sen}^2\, A_1 P > 0$, el signo de q dependerá solamente del que tengan $\cos l_1$ y $\cos A_1$; y el signo de r, depende de los de $\mathrm{sen}(l_1 + l_2)$ y $\mathrm{sen}(l_2 - l_1)$ (según sea l_1 respecto de l_2 y $l_1 + l_2$ respecto de 180°).

La existencia y unicidad de soluciones de este problema depende de la resolución de la ambigüedad con que ha sido calculado el ángulo A_2. Para ello se aplicarían las condiciones de existencia y propiedades de los triángulos esféricos, o los resultados indicados en la siguiente proposición.

Proposición 3.4 *La existencia y número de soluciones en la resolución de un triángulo esférico oblicuángulo del cual se conocen dos lados, l_1, l_2, y el ángulo opuesto a uno de ellos, A_1, queda reflejada en las dos tablas siguientes, donde ρ siendo ρ es el perpendículo trazado desde el vértice opuesto al lado desconocido.*

$A_1 < 90^o$			Nº de soluciones
$l_2 < 90^o$	$l_1 < l_2$	$l_1 < \rho$	0
		$l_1 = \rho$	1
		$l_1 > \rho$	2
	$l_1 = l_2$		1
	$l_1 > l_2$	$l_1 + l_2 < 180^o$	1
		$l_1 + l_2 \geq 180^o$	0

$A_1 < 90^{\circ}$				Nº de soluciones
$l_2 = 90^{\circ}$	$l_1 < l_2$	$l_1 < \rho$		0
		$l_1 = \rho$		1
		$l_1 > \rho$		2
	$l_1 \geq l_2$			0
$l_2 > 90^{\circ}$	$l_1 < l_2$	$l_1 + l_2 < 180^{\circ}$	$l_1 < \rho$	0
			$l_1 = \rho$	1
			$l_1 > \rho$	2
		$l_1 + l_2 \geq 180^{\circ}$		1
	$l_1 \geq l_2$			0

$A_2 > 90^{\circ}$				Nº de soluciones
$l_2 < 90^{\circ}$	$l_1 \leq l_2$			0
	$l_1 > l_2$	$l_1 + l_2 \leq 180^{\circ}$		1
		$l_1 + l_2 > 180^{\circ}$	$l_1 < \rho$	2
			$l_1 = \rho$	1
			$l_1 > \rho$	0
$l_2 = 90^{\circ}$	$l_1 \leq l_2$			0
	$l_1 > l_2$	$l_1 < \rho$		2
		$l_1 = \rho$		1
		$l_1 > \rho$		0
$l_2 > 90^{\circ}$	$l_1 < l_2$	$l_1 + l_2 \leq 180^{\circ}$		0
		$l_1 + l_2 > 180^{\circ}$		1
	$l_1 = l_2$			1
	$l_1 > l_2$	$l_1 < \rho$		2
		$l_1 = \rho$		1
		$l_1 > \rho$		0

Demostración. Para demostrar esta proposición pueden utilizarse tanto el método del perpendículo como el método de la ecuación de segundo grado. Con el fin de mostrar la aplicación de cada uno de estos métodos, resolveremos los casos ($A_1 < 90^{\circ}$, $l_2 < 90^{\circ}$) y ($A_1 > 90^{\circ}$, $l_2 < 90^{\circ}$) mediante el primer y el segundo método respectivamente.

Resolución del caso $A_1 < 90^{\circ}$ y $l_2 < 90^{\circ}$ mediante el método del perpendículo

Sea ρ el arco del perpendículo trazado desde el vértice opuesto al lado desconocido y sea C el punto intersección del perpendículo con dicho lado. Es evidente que el arco A_3C puede estar en el interior o en el exterior del triángulo que buscamos, según que A_1 o A_2 sean de la misma especie o no.

Independientemente que estemos en un caso u otro, se cumple que $\operatorname{sen} \rho = \operatorname{sen} l_2 \operatorname{sen} A_1$. Para los valores considerados del ángulo A_1 y el lado l_2 y en función de la relación existente entre los lados l_1 y l_2, pueden ocurrir los siguientes casos:

1. $l_1 < l_2$ (será $0^o < l_1 < l_2 < 90^o$)

   Aplicando la segunda fórmula de Bessel tenemos que:

$$\operatorname{sen} A_2 = \frac{\operatorname{sen} l_2 \operatorname{sen} A_1}{\operatorname{sen} l_1} = \frac{\operatorname{sen} p}{\operatorname{sen} l_1}.$$

   Además, ρ debe ser de la misma especie que A_1, al ser el lado opuesto a dicho ángulo en el triángulo rectángulo A_1A_3C. Aparecen pues las siguientes posibilidades:

   i) $\rho < l_1 < 90^o$. Será

$$\operatorname{sen} \rho < \operatorname{sen} l_1 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} \rho}{\operatorname{sen} l_1} = \operatorname{sen} A_2 < 1.$$

   De este modo, tendremos dos valores para A_2; uno agudo A_2^1 y otro obtuso $A_2^2 = 180^o - A_2^1$. En este caso existen dos soluciones, pues las expresiones (17) y (18) son válidas para los dos valores de A_2.

   ii) $\rho = l_1$. Será

$$\operatorname{sen} \rho = \operatorname{sen} l_1 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} p}{\operatorname{sen} l_1} = \operatorname{sen} A_2 = 1.$$

   Tendremos que $A_2 = 90^o$, existiendo pues una única solución, ya que las fórmulas (17) y (18) proporcionan, sin ambigüedad, valores únicos para l_3 y A_3.

   iii) $l_1 < \rho < 90^o$. Será

$$\operatorname{sen} l_1 < \operatorname{sen} \rho \Rightarrow 1 < \frac{\operatorname{sen} \rho}{\operatorname{sen} l_1} = \operatorname{sen} A_2.$$

   En este caso no existirá solución, pues debe ser $\operatorname{sen} A_2 \leq 1$.

2. $l_1 = l_2$.

   Por ser $\operatorname{sen} l_1 = \operatorname{sen} l_2$, se deduce que $\operatorname{sen} A_2 = \operatorname{sen} A_1$; y por tanto, el ángulo A_2 admitirá como soluciones $A_2^1 = A_1$ y $A_2^2 = 180^o - A_1$.

   Ahora bien, puesto que $l_1 = l_2$, el triángulo $A_1A_2A_3$ es isósceles y necesariamente $A_3 = A_2^1 = A_1$, ya que a lados iguales le corresponden ángulos iguales y viceversa. Así pues, en este caso el problema tiene una única solución.

3. $l_1 > l_2$.

   Pueden darse dos posibilidades:

   i) $l_1 + l_2 < 180^o$. Puesto que: $l_1 < 180^o - l_2$, será $\operatorname{sen} l_1 > \operatorname{sen} l_2$. (independientemente que $l_1 \geq 90^o$ ó $l_1 < 90^o$). Luego

$$\operatorname{sen} A_2 = \frac{\operatorname{sen} l_2}{\operatorname{sen} l_1} \operatorname{sen} A_1 < \operatorname{sen} A_1.$$

   De los dos valores que podrá tomar A_2, únicamente aquel que sea menor que A_1 proporcionará una solución del problema, ya que, al ser su suplementario mayor que A_1, las diferencias $l_1 - l_2$ y $A_1 - A_2$ serán de signos diferentes, por lo que las fórmulas (17) y (18) no darán una solución admisible.

   ii) $l_1 + l_2 \geq 180^o$.

   En este caso: $l_1 \geq 180^o - l_2 \Rightarrow \operatorname{sen} l_1 \leq \operatorname{sen} l_2$.

Por tanto

$$\operatorname{sen} A_2 = \frac{\operatorname{sen} l_2}{\operatorname{sen} l_1} \operatorname{sen} A_1 \geq \operatorname{sen} A_1.$$

Los dos valores posibles del ángulo A_2 son mayores que A_1, con lo que las diferencias $l_1 - l_2$ y $A_1 - A_2$ tienen signos contrarios. Así pues, las expresiones (17) y (18) no proporcionan en ningún caso soluciones admisibles para A_3 y l_3.

Corolario 3.3 *Si en la resolución de un triángulo esférico oblicuángulo del cual se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos existen dos soluciones entonces se verifica una de las dos condiciones siguientes:*

i) $l_1 + l_2 < 180^o$ *y* $l_1 < l_2$,

ii) $l_1 + l_2 > 180^o$ *y* $l_1 > l_2$.

Resolución del caso $A_1 > 90^{\text{o}}$ y $l_2 < 90^{\text{o}}$ mediante el método de la ecuación de segundo grado

Según los valores relativos de l_1 con respecto a l_2, pueden darse los siguientes casos:

1. $l_1 < l_2$. Obviamente se tiene que $l_1 < 90^{\text{o}} \Rightarrow \cos l_1 > 0$, y como $\cos A_1 < 0$, entonces $q = \dfrac{-2\cos l_1 \operatorname{sen} l_2 \cos A_1}{1 - \operatorname{sen}^2 l_2 \operatorname{sen}^2 A_1} > 0$. Además, como $l_1 + l_2 < 180^{\text{o}}$ será

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}(l_1 + l_2) > 0 \\ \operatorname{sen}(l_2 - l_1) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow r = \frac{\operatorname{sen}(l_1 + l_2)\operatorname{sen}(l_2 - l_1)}{1 - \operatorname{sen}^2 l_2 \operatorname{sen}^2 A_1} > 0.$$

Por tanto, si x_1 y x_2 son las soluciones de la correspondiente ecuación de segundo grado (con $x = \operatorname{sen} l_3$), entonces:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -q < 0 \\ x_1 \times x_2 = r > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1, x_2 < 0.$$

Como las soluciones que satisfacen el problema han de ser positivas, en este caso no existe solución.

2. $l_1 = l_2 < 90^{\text{o}}$. En esta hipótesis se cumple

$$\left.\begin{array}{l} \cos l_1 > 0 \\ \cos A_1 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow q > 0, \text{ y } \left.\begin{array}{l} l_1 + l_2 = 2l_1 < 180^{\text{o}} \\ l_2 - l_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow r = 0.$$

La ecuación del problema sería ahora $x^2 + qx = 0$, cuyas soluciones son $x_1 = 0$ y $x_2 = -q < 0$, y consecuentemente, el problema, como sucedía en el caso anterior, no tiene solución.

3. $l_1 > l_2$. En esta situación, los posibles valores del lado l_1 (mayor, menor o igual que 90°), nos permiten distinguir los siguientes casos:

   i) $l_1 + l_2 < 180^{\text{o}}$. Si suponemos que $l_1 < 90^{\text{o}}$, entonces

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \cos l_1 > 0 \\ \cos A_1 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow q > 0 \\ \left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}(l_2 + l_1) > 0 \\ \operatorname{sen}(l_2 - l_1) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow r < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -q < 0 \\ x_1 \cdot x_2 = r < 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \end{array}\right.$$

   Por tanto, en este caso la solución existirá y será única, $x_1 > 0$. Igual sucedería cuando $l_1 = 90^{\text{o}}$ ó $l_1 > 90^{\text{o}}$.

ii) $l_1 + l_2 = 180^o$. Como $l_2 < 90^o$, debe ser $l_1 > 90^o$. Luego

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\cos l_1 < 0\\ \cos A_1 < 0\end{array}\right\} \Rightarrow \quad q < 0\\ \left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}(l_2 + l_1) = 0\\ \operatorname{sen}(l_2 - l_1) < 0\end{array}\right\} \Rightarrow \quad r = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x_1 = 0\\ x_2 = -q > 0\end{array}\right.$$

Así pues, en este caso existe solución $x_2 > 0$, que además, es única.

iii) $l_1 + l_2 > 180^o$. Al igual que sucedía en el caso anterior, esta hipótesis se cumplirá cuando $l_1 > 90^o$. Entonces

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\cos l_1 < 0\\ \cos A_1 > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \quad q < 0\\ \left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}(l_2 + l_1) < 0\\ \operatorname{sen}(l_2 - l_1) < 0\end{array}\right\} \Rightarrow \quad r > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x_1 > 0\\ x_2 > 0\end{array}\right.$$

Por tanto, en principio, pueden existir dos soluciones del problema. Ya se comentó en el método de la ecuación de segundo grado que era condición necesaria, que no suficiente, para la existencia de dos soluciones. Tendremos que analizar la situación con detalle aplicando el método del perpendículo.

Consideremos, pues, el triángulo rectángulo obtenido al trazar el perpendículo desde el vértice A_3, cuyos lados son l_2 y ρ y siendo ángulo opuesto a este último lado A_1. Se verificarán las siguientes propiedades:

a) Dado que en todo triángulo esférico rectángulo cada cateto y y el lado opuesto han de ser de la misma especie; esto es, o ambos son obtusos o ambos agudos, y al ser $A_1 > 90^o$, se tiene que $\rho > 90^o$.

b) De la resolución del triángulo considerado se obtiene que

$$\operatorname{sen}\rho = \operatorname{sen} l_2 \ \operatorname{sen} A_1$$

y al ser

$$\operatorname{sen} A_2 = \frac{\operatorname{sen} l_2 \ \operatorname{sen} A_1}{\operatorname{sen} l_1} = \frac{\operatorname{sen}\rho}{\operatorname{sen} l_1},$$

no existirá solución cuando $\operatorname{sen}\rho > \operatorname{sen} l_1$. Puesto que $l_1 > 90^o$ y $\rho > 90^o$, esto sucederá cuando $\rho < l_1$. Llegamos pues a la siguiente conclusión:

- existirá una única solución si $p = l_1$.
- existirán dos soluciones si $p > l_1$.

3.3.7. Resolución conocidos dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos

Datos: A_1, A_2 y l_1. Incógnitas: l_2, l_3 y A_3.

Independientemente de la resolución individualizada de este problema, resulta más cómodo considerar el triángulo polar del propuesto, con lo que este problema se reduce a la resolución de un triángulo del cual se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. Así pues, se calcularán los siguientes valores correspondientes al triángulo polar

$$\left\{\begin{array}{l}l_1' = 180^o - A_1\\ l_2' = 180^o - A_2\\ A_1' = 180^o - l_1\end{array}\right.$$

y, como se indicó en el caso anterior, se obtendrán los valores de A'_2, A'_3 y l'_3, verificándose que

$$l_2 = 180^{\circ} - A'_2, \quad l_3 = 180^{\circ} - A'_3, \quad y \quad A_3 = 180^{\circ} - l'_3.$$

La solución existirá cuando

$$\operatorname{sen} A'_2 = \frac{\operatorname{sen} l'_2 \operatorname{sen} A'_1}{\operatorname{sen} l'_1} \leq 1 \Rightarrow \operatorname{sen} l'_2 \operatorname{sen} A'_1 \leq \operatorname{sen} l'_1,$$

que equivale a

$$\operatorname{sen}(180^{\circ} - A_2) \operatorname{sen}(180^{\circ} - l_1) \leq \operatorname{sen}(180^{\circ} - A_1) \Rightarrow \operatorname{sen} A_2 \operatorname{sen} l_1 \leq \operatorname{sen} A_1.$$

También tendrá solución cuando se verifique una de las condiciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} l'_1 + l'_2 < 180^{\circ} \\ A'_1 + A'_2 < 180^{\circ} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} l'_1 + l'_2 > 180^{\circ} \\ A'_1 + A'_2 > 180^{\circ} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} l'_1 + l'_2 = 180^{\circ} \\ A'_1 + A'_2 = 180^{\circ} \end{array}\right\}$$

en las que sustituyendo valores, se obtienen las condiciones relativas al triángulo propuesto,

$$\left.\begin{array}{l} A_1 + A_2 > 180^{\circ} \\ l_1 + l_2 > 180^{\circ} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} A_1 + A_2 < 180^{\circ} \\ l_1 + l_2 < 180^{\circ} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} A_1 + A_2 = 180^{\circ} \\ l_1 + l_2 = 180^{\circ} \end{array}\right\}$$

Igual que en el caso anterior, el caso será dudoso (cero, una o dos soluciones), cuando se verifique una de las dos condiciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} l'_1 + l'_2 < 180^{\circ} \\ l'_1 < l'_2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} l'_1 + l'_2 > 180^{\circ} \\ l'_1 > l'_2 \end{array}\right\}$$

que equivalen a

$$\left.\begin{array}{l} A_1 + A_2 > 180^{\circ} \\ A_1 > A_2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} A_1 + A_2 < 180^{\circ} \\ A_1 < A_2 \end{array}\right\}$$

De este modo, la existencia y unicidad de soluciones se deduce fácilmente de los resultados expresados para el caso anterior.

3.4. Problemas

1. Demostrar que en un triángulo esférico rectángulo del cual se conocen la hipotenusa l_1 y un cateto l_2 se verifica que:

$$\tan^2 \frac{l_3}{2} = \tan \frac{l_1 - l_2}{2} \tan \frac{l_1 + l_2}{2}.$$

2. Demostrar que en un triángulo esférico rectángulo cada cateto y su ángulo opuesto son de la misma especie.

3. Demostrar que el número de lados de un triángulo esférico rectángulo superiores a 90º es siempre par.

4. Demostrar que en un triángulo esférico rectángulo del cual se conocen los ángulos oblicuos A_1 y A_2 se verifica que:

i) $\tan^2 \dfrac{l_3}{2} = -\dfrac{\cos(A_1 + A_2)}{\cos(A_1 - A_2)}$.

ii) $\tan^2 \dfrac{A_3}{2} = \dfrac{\operatorname{sen}(l_1 - l_2)}{l_1 + l_2}$.

5. Demostrar la condición necesaria y suficiente para la existencia de solución en la resolución de un triángulo esférico rectángulo del cual se conocen la hipotenusa l_3 y un cateto l_2, partiendo de la expresión:

$$\tan l_2 = \tan l_3 \cos A_1.$$

6. Resolver un triángulo esférico rectángulo en los siguientes casos:

   i) Conocido un cateto y la suma de la hipotenusa con el otro cateto.

   ii) Conocido un ángulo oblicuo y la suma de la hipotenusa con el cateto opuesto a dicho ángulo.

   iii) Conocido un ángulo oblicuo y la suma de la hipotenusa con el cateto opuesto a dicho ángulo.

   iv) Conocida la hipotenusa y la suma de los catetos.

   v) Conocido un cateto y la diferencia entre la hipotenusa y el otro cateto.

   vi) Conocido un ángulo oblicuo y la diferencia entre el otro ángulo oblicuo y el cateto opuesto al ángulo dado.

   vii) Conocido un cateto y la suma de los ángulos oblicuos.

7. Demostrar las siguientes relaciones entre los elementos de un triángulo esférico rectángulo ($A_3 = 90^o$):

   i) $\cos^2 A_1 \operatorname{sen}^2 l_3 = \operatorname{sen}(l_3 + l_1) \operatorname{sen}(l_3 - l_1)$.

   ii) $\operatorname{sen}^2 A_1 = \cos^2 A_2 + \operatorname{sen}^2 l_1 \operatorname{sen}^2 A_2$.

   iii) $\tan l_1 \cos l_3 = \operatorname{sen} l_2 \cot A_2$.

   iv) $\operatorname{sen}(l_2 + l_3) = 2\cos^2 \dfrac{A_1}{2} \cos l_2 \cos l_3$.

   v) $\operatorname{sen}(l_3 - l_2) = 2\operatorname{sen}^2 \dfrac{A_1}{2} \cos l_2 \operatorname{sen} l_3$.

8. Demostrar que no existe triángulo esférico rectángulo alguno que satisfaga cualquiera de las condiciones siguientes:

   i) $A_1 + A_2 < 90^o$.

   ii) $A_1 + A_2 > 270^o$.

9. Demostrar que en un triángulo esférico rectángulo en A_1 se verifica:

$$\operatorname{sen}(A_2 + A_3) = \frac{\cos l_2 + \cos l_3}{1 + \cos l_2 \cos l_3}.$$

10. Sea un triángulo esférico rectángulo ($A_2 = 90^o$). Demostrar que:

$$\tan^2\left(45^o - \frac{A_1}{2}\right) = \tan\frac{l_2 - l_1}{2}\cot\frac{l_2 + l_1}{2}.$$

11. Sea un triángulo esférico rectángulo en A_2. Demostrar que:

$$\tan^2\frac{l_2}{2} = -\tan\frac{l_3 + l_1}{2}\tan\frac{l_3 - l_1}{2}.$$

12. Demostrar que en un triángulo esférico rectángulo ($A_1 = 90^o$) se cumple que

$$\tan^2\frac{l_2}{2} = -\tan\left(45^o - \frac{A_3 - A_2}{2}\right)\tan\left(45^o - \frac{A_3 + A_2}{2}\right).$$

13. Demostrar que, dados un lado y su ángulo opuesto y tales que ambos son menores o mayores que dos rectos se pueden determinar dos triángulos esféricos rectángulos.

14. Demostrar que en un triángulo esférico rectilátero ($l_3 = 90^o$) se cumple que:

$$\tan^2\frac{A_3}{2}\tan^2\frac{l_2}{2} = -\frac{\operatorname{sen}(A_3 + A_1)\cos(l_1 - l_2)}{\operatorname{sen}(A_3 - A_1)\cos(l_1 + l_2)}.$$

15. Utilizando el Pentágono de Neper obtener las fórmulas relativas a la resolución de triángulos esféricos rectiláteros.

16. Demostrar que en todo triángulo esférico rectilátero el número de ángulos superior a 90° es siempre impar.

17. Demostrar que en todo triángulo esférico rectilátero cada ángulo adyacente al lado recto y su lado opuesto son de la misma especie.

18. Resolver un triángulo esférico rectilátero y analizar la existencia y unicidad de solución en los siguientes casos:

    i) Conocidos los dos ángulos adyacentes al lado recto.

    ii) Conocidos un ángulo adyacente al lado recto y el lado oblicuo adyacente a este ángulo.

    iii) Conociendo un ángulo adyacente al lado recto y el lado oblicuo opuesto a dicho ángulo.

    iv) Conociendo los lados oblicuos.

    v) Conociendo un ángulo opuesto al lado recto y un lado oblicuo adyacente a este ángulo.

19. Resolver un triángulo esférico oblicuángulo y analizar la existencia y unicidad de solución cuando se conocen los tres ángulos, utilizando el triángulo polar del dado.

20. Utilizando el método del perpendículo resolver un triángulo esférico oblicuángulo del cual se conocen un lado y los ángulos adyacentes analizando, asimismo, la existencia y unicidad de solución.

21. Estudiar la existencia y unicidad de solución en la resolución de un triángulo esférico oblicuángulo del cual se conocen los lados l_1 y l_2 y el ángulo A_1 opuesto a uno de ellos utilizando el método del perpendículo y el método de la ecuación de segundo grado en los siguientes casos:

    i) $A_1 < 90^o, l_2 = 90^o$. *ii)* $A_1 > 90^o, l_2 > 90^o$.

22. Resolver un triángulo esférico oblicuángulo del cual se conocen dos ángulos A_1 y A_2 y el lado opuesto a uno de ellos l_1 utilizando cualquiera de los métodos usuales: método del perpendículo, método de la ecuación de segundo grado o resolviendo el triángulo polar del triángulo dado; en los siguientes casos:

    i) $l_1 < 90^o, A_2 < 90^o$. *ii)* $l_1 > 90^o, A_2 < 90^o$.

23. Estudiar geométricamente la unicidad de la solución en la resolución de un triángulo esférico conocidos dos lados y un ángulo.

24. Demostrar la existencia de solución en la resolución de un triángulo esférico oblicuángulo del cuál se conocen los tres ángulos a partir de las fórmulas de Borda.

25. Indicar el proceso de cálculo que permite obtener los elementos de un triángulo esférico conociendo los valores de un lado, del perpendículo y la mediana a dicho lado trazados desde el vértice opuesto a dicho lado.

26. Sea un triángulo esférico en el que el punto medio del lado A_1A_2 equidista de los tres vértices de dicho triángulo. Demostrar que:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{l_3}{2} = \operatorname{sen}^2 \frac{l_1}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{l_2}{2}.$$

27. Probar que en un triángulo esférico equilátero se verifica que

$$\sec A_1 - \sec l_1 = 1.$$

28. Demostrar que la bisectriz esférica de un ángulo de un triángulo esférico divide al lado opuesto en dos arcos cuyos senos son proporcionales a los senos de los lados contiguos.

29. ¿Puede existir un cuadrado esférico, es decir, una parte de superficie esférica limitada por cuatro arcos de circunferencia máxima, iguales entre sí y perpendiculares dos a dos?

4. Algunas aplicaciones de la Trigonometría Esférica

4.1. Aplicaciones en Geometría

Definición 4.1 *Se define el área de un huso esférico de un grado de amplitud a la* $1/360$ *parte del área total de la superficie esférica*[2]*; y, como área de un huso de* n *grados de amplitud, al producto por* n *del área del huso esférico de un grado; esto es,*

$$A_{huso(n)} = \frac{\pi R^2 n}{90} = 2R^2\alpha$$

siendo α *la amplitud del huso en radianes y* R *el radio de la esfera.*

Proposición 4.1 *El área de un triángulo esférico* ABC *perteneciente a una esfera de radio* R *es igual al exceso esférico en radianes por el radio al cuadrado; esto es,*

$$S = \frac{\epsilon\pi}{180^o}R^2.$$

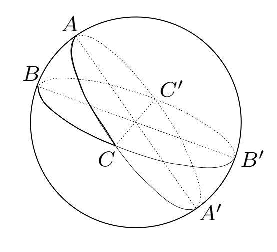


Figura 4.1

Demostración. Las circunferencias máximas de los lados del triángulo esférico forman tres husos cuyas amplitudes son los ángulos del triángulo. Denominemos estos husos y sus amplitudes por

$$\begin{array}{lcl} Huso\ 1 = (ABA'CA) & \longrightarrow & \alpha \\ Huso\ 2 = (BCB'AB) & \longrightarrow & \beta \\ Huso\ 3 = (CBC'AC) & \longrightarrow & \gamma \end{array}$$

Si consideramos el huso opuesto a uno de ellos; por ejemplo,

$$Huso\ 3' = (CA'C'B'C),$$

cuya amplitud será $\gamma' = \gamma$, entonces la unión de los husos 1, 2 y 3', completa un hemisferio más el triángulo $A'B'C'$ simétrico del dado. Puesto que el triángulo ABC se ha cubierto dos veces, se tiene que

$$S_{1\cup 2\cup 3'} = S_{Hemisferio} + S_{ABC} + S_{A'B'C'}.$$

Teniendo en cuenta la definición de área de un huso y que dos triángulos simétricos tienen el mismo área, entonces se verifica que

$$\frac{\pi R^2}{90}(\alpha+\beta+\gamma) = 2\pi R^2 + 2S_{ABC},$$

por tanto,

$$S_{ABC} = \frac{\pi R^2}{180}(\alpha+\beta+\gamma-180^o) = \frac{\pi\epsilon}{180}R^2.$$

[2] Área de una esfera de radio $R = 4\pi R^2$.

Corolario 4.1 *El área de un triángulo esférico es al área de la superficie de la esfera como el número de grados que hay en su exceso esférico es a 720º; esto es,*

$$\frac{S}{4\pi R^2} = \frac{\epsilon}{720^o}.$$

Esta dependencia del área de un triángulo esférico respecto del exceso esférico hace que sea conveniente obtener expresiones de éste en función de otros elementos del triángulo esférico.

Proposición 4.2 *(Fórmula de L'Huilier) Sean a, b y c los lados de un triángulo esférico y p el semiperímetro. Entonces, el exceso esférico viene dado por*

$$\tan^2\frac{\epsilon}{4} = \tan\frac{p}{2}\,\tan\frac{p-a}{2}\,\tan\frac{p-b}{2}\,\tan\frac{p-c}{2}.$$

Demostración. Sustituyendo $\dfrac{A+B}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{C-\epsilon}{2}$, en las siguientes analogías de Gauss-Delambre

$$\frac{\operatorname{sen}\dfrac{A+B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}} = \frac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{c}{2}}, \qquad \frac{\cos\dfrac{A+B}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{C}{2}} = \frac{\cos\dfrac{a+b}{2}}{\cos\dfrac{c}{2}},$$

se obtiene

$$\frac{\cos\dfrac{C-\epsilon}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}} = \frac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{c}{2}}, \qquad \frac{\operatorname{sen}\dfrac{C-\epsilon}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{C}{2}} = \frac{\cos\dfrac{a+b}{2}}{\cos\dfrac{c}{2}}.$$

Expresiones equivalentes a

$$\frac{\cos\dfrac{C-\epsilon}{2} - \cos\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{C-\epsilon}{2} + \cos\dfrac{C}{2}} = \frac{\cos\dfrac{a-b}{2} - \cos\dfrac{c}{2}}{\cos\dfrac{a-b}{2} + \cos\dfrac{c}{2}}, \quad \frac{-\operatorname{sen}\dfrac{C-\epsilon}{2} + \operatorname{sen}\dfrac{C}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{C-\epsilon}{2} + \operatorname{sen}\dfrac{C}{2}} = \frac{-\cos\dfrac{a+b}{2} + \cos\dfrac{c}{2}}{\cos\dfrac{a+b}{2} + \cos\dfrac{c}{2}}.$$

luego

$$\frac{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{C}{2} - \dfrac{\epsilon}{4}\right)\operatorname{sen}\dfrac{\epsilon}{4}}{2\cos\left(\dfrac{C}{2} - \dfrac{\epsilon}{4}\right)\cos\dfrac{\epsilon}{4}} = \frac{2\operatorname{sen}\dfrac{p-b}{2}\operatorname{sen}\dfrac{p-a}{2}}{2\cos\dfrac{p-b}{2}\cos\dfrac{p-a}{2}},$$

$$\frac{2\cos\left(\dfrac{C}{2} - \dfrac{\epsilon}{4}\right)\operatorname{sen}\dfrac{\epsilon}{4}}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{C}{2} - \dfrac{\epsilon}{4}\right)\cos\dfrac{\epsilon}{4}} = \frac{2\operatorname{sen}\dfrac{p}{2}\operatorname{sen}\dfrac{p-c}{2}}{2\cos\dfrac{p}{2}\cos\dfrac{p-c}{2}}.$$

Al multiplicar ambas igualdades miembro a miembro resulta

$$\tan^2\frac{\epsilon}{4} = \tan\frac{p}{2}\,\tan\frac{p-a}{2}\,\tan\frac{p-b}{2}\,\tan\frac{p-c}{2}.$$

La Fórmula de L'Huilier puede aplicarse también para calcular los ángulos de un triángulo esférico cuando se conocen los lados del mismo. Para ello, se aplica a los triángulos adyacentes, cuyos lados son fáciles de obtener, calculándose sus excesos esféricos, ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3; los cuales proporcionan ecuaciones lineales suficientes para el cálculo de A, B y C. Los resultados obtenidos podrán comprobarse por la expresión $\epsilon + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 360^{\rm o}$.

Por ejemplo,

$$\left.\begin{array}{l} \epsilon = A + B + C - 180^{\rm o} \\ \epsilon_1 = 180^{\rm o} + A - B - C \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{\epsilon + \epsilon_1}{2},$$

y análogamente,

$$B = \frac{\epsilon + \epsilon_2}{2}, \quad C = \frac{\epsilon + \epsilon_3}{2}.$$

Proposición 4.3 *Si en un triángulo esférico se conocen dos lados, b y c, y el ángulo comprendido, A, el exceso esférico de dicho triángulo viene dado por*

$$\tan\frac{\epsilon}{2} = \frac{\tan\frac{b}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{c}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{c-\varphi}{2}}\,\mathrm{sen}\,A,$$

siendo $\varphi = 2\arctan\left(\tan\frac{b}{2}\cos A\right)$.

Proposición 4.4 *Si consideramos un triángulo esférico suficientemente pequeño y si despreciamos términos desde el tercer orden en adelante, entonces las fórmulas de la trigonometría esférica se transforman en las de la trigonometría plana.*

Demostración. Al ser el triángulo esférico pequeño, podemos expresar

$$\begin{array}{l} \mathrm{sen}\,a = a, \quad \mathrm{sen}\,b = b, \quad \mathrm{sen}\,c = c, \\ \cos a = 1 - \frac{a^2}{2}, \quad \cos b = 1 - \frac{b^2}{2}, \quad \cos c = 1 - \frac{c^2}{2}. \end{array}$$

Por tanto, el teorema del seno se transforman en

$$\frac{a}{\mathrm{sen}\,A} = \frac{b}{\mathrm{sen}\,B} = \frac{c}{\mathrm{sen}\,C}.$$

y el teorema del coseno en

$$1 - \frac{a^2}{2} = \left(1 - \frac{b^2}{2}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2}\right) + cb\cos A,$$

de donde despreciando los términos a partir del tercer orden, nos queda

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos A.$$

A partir de la generalización de este resultado podemos concluir que la trigonometría plana es una particularización de la trigonometría esférica.

Teorema 4.1 *(Teorema de Legendre) Si dado un triángulo esférico suficientemente pequeño con relación al radio R de la esfera, se construye un triángulo rectilíneo cuyos lados tengan la misma longitud que los del triángulo esférico, entonces las áreas de ambos triángulos son iguales y los ángulos del triángulo esférico son iguales a los del triángulo rectilíneo aumentados en la tercera parte del exceso esférico.*

Demostración. Consideremos los ángulos y los lados del triángulo esférico en radianes. Entonces

$$a = \frac{\alpha}{R}, \quad b = \frac{\beta}{R}, \quad c = \frac{\gamma}{R},$$

siendo α, β y γ, las longitudes de los lados del triángulo esférico.

Aplicando la 1ª Fórmula de Bessel, se tiene

$$\cos A = \frac{\cos\frac{\alpha}{R} - \cos\frac{\beta}{R}\cos\frac{\gamma}{R}}{\operatorname{sen}\frac{\beta}{R}\operatorname{sen}\frac{\gamma}{R}}. \tag{23}$$

Teniendo en cuenta que

$$\cos\left\{\begin{array}{c}\frac{\alpha}{R}\\ \frac{\beta}{R}\\ \frac{\gamma}{R}\end{array}\right\} = 1 - \left\{\begin{array}{c}\frac{\alpha^2}{2R^2}\\ \frac{\beta^2}{2R^2}\\ \frac{\gamma^2}{2R^2}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\frac{\alpha^4}{24R^4}\\ \frac{\beta^4}{24R^4}\\ \frac{\gamma^4}{24R^4}\end{array}\right\} - ...,$$

$$\operatorname{sen}\left\{\begin{array}{c}\frac{\beta}{R}\\ \frac{\gamma}{R}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\frac{\beta}{R}\\ \frac{\gamma}{R}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c}\frac{\beta^3}{6R^3}\\ \frac{\gamma^3}{6R^3}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\frac{\beta^5}{120R^5}\\ \frac{\gamma^5}{120R^5}\end{array}\right\} - ...,$$

y despreciando las potencias superiores al cuarto grado por ser los lados α, β, γ suficientemente pequeños, la expresión (23) queda

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2R^2} + \frac{\alpha^4-\beta^4-\gamma^4-6\beta^2\gamma^2}{24R^4}}{\frac{\beta\gamma}{R^2}\left(1-\frac{\beta^2+\gamma^2}{6R^2}\right)}\\ &= \left(\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} + \frac{\alpha^4-\beta^4-\gamma^4-6\beta^2\gamma^2}{24\beta\gamma R^2}\right)\left(1-\frac{\beta^2+\gamma^2}{6R^2}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Como

$$\left(1-\frac{\beta^2+\gamma^2}{6R^2}\right)^{-1} \doteq \left(1+\frac{\beta^2+\gamma^2}{6R^2}\right),$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}+\frac{\alpha^4-\beta^4-\gamma^4-6\beta^2\gamma^2}{24\beta\gamma R^2}+\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}\frac{\beta^2+\gamma^2}{6R^2} \\ &= \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}-\frac{2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4}{24\beta\gamma R^2}.\end{aligned} \tag{24}$$

Sea ahora S' el área del triángulo rectilíneo que tiene por lados α, β, y γ; y cuyos ángulos opuestos en radianes son A', B' y C', respectivamente. Por la ley del coseno de la trigonometría plana se tiene

$$\begin{aligned}&\cos A = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}, \\ &\operatorname{sen} A = 1-\left(\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}\right)^2 = \frac{2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4}{4\beta^2\gamma^2},\end{aligned}$$

luego la ecuación (24) queda

$$\cos A = \cos A' - \frac{\beta\gamma \operatorname{sen}^2 A'}{6R^2},$$

y como $S' = \frac{1}{2}\beta\gamma \operatorname{sen} A'$, será

$$\cos A = \cos A' - \frac{S'}{3R^2}\operatorname{sen} A'. \tag{25}$$

Si se considera que $A = A' + x$ entonces $\cos A = \cos A' \cos x - \operatorname{sen} A' \operatorname{sen} x$, y puesto que bajo nuestra hipótesis de aproximación x es suficientemente pequeño, podemos considerar que $\cos x = 1$ y $\operatorname{sen} x = x$. Luego

$$\cos A = \cos A' - x \operatorname{sen} A',$$

que al ser comparada con la expresión (25), proporciona $x = \frac{S'}{3R^2}$.

De forma análoga se obtiene

$$A = A' + \frac{S'}{3R^2}, \quad B = B' + \frac{S'}{3R^2}, \quad C = C' + \frac{S'}{3R^2}.$$

Sumando miembro a miembro

$$A+B+C = A'+B'+C'+\frac{S'}{R^2} = \pi + \frac{S'}{R^2},$$

lo que implica que el exceso esférico es $\epsilon = \frac{S'}{R^2}$. Teniendo en cuenta que $\epsilon = \frac{S}{R^2}$, donde S es el área del triángulo esférico, se concluye que

$$S = S', \quad A = A' + \frac{\epsilon}{3R^2}, \quad B = B' + \frac{\epsilon}{3R^2}, \quad C = C' + \frac{\epsilon}{3R^2}.$$

El Teorema de Legendre se puede aplicar en la resolución de triángulos esféricos pequeños; así, si se conocen los lados α, β y γ, se calculan los ángulos A', B' y C' y el área S' del triángulo rectilíneo que tiene por lados los del triángulo esférico dado y aplicando las expresiones obtenidas se calcularán los ángulos A, B, y C de dicho triángulo esférico.

Proposición 4.5 *Sea ABC un triángulo esférico. Entonces el radio de la circunferencia inscrita en él viene dado en función de los lados de dicho triángulo por*

$$\tan r = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\ \operatorname{sen}(p-b)\ \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p}},$$

siendo p el semiperímetro.

Demostración. El punto I, denominado incentro, es el centro de la circunferencia inscrita y se obtiene como la intersección de los arcos de circunferencias máximas que son bisectrices de los ángulos del triángulo esférico.

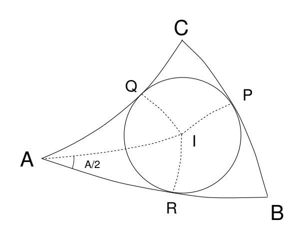
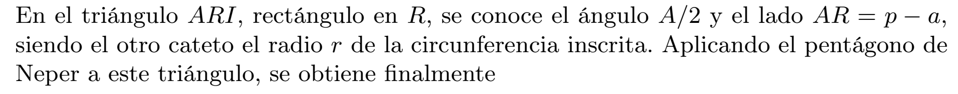


Figura 4.2

De esta definición se deduce que los arcos AQ y AR comprendidos entre el vértice A y los puntos de contacto Q y R de la circunferencia inscrita con el triángulo esférico son iguales, quedando dividido el perímetro del triángulo en seis arcos iguales dos a dos. Por tanto, tres de ellos distintos sumarán el semiperímetro, verificándose

$$p = AR + BP + PC = AR + a \Longrightarrow AR = p - a = AQ.$$

De igual modo, se tiene que $BP = p - b = BR$, $CP = p - c = CQ$.



En el triángulo ARI, rectángulo en R, se conoce el ángulo $A/2$ y el lado $AR = p - a$, siendo el otro cateto el radio r de la circunferencia inscrita. Aplicando el pentágono de Neper a este triángulo, se obtiene finalmente

$$\tan r = \operatorname{sen}(p-a)\ \tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\ \operatorname{sen}(p-b)\ \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p}}.$$

Proposición 4.6 *Sea ABC un triángulo esférico. Entonces el radio de la circunferencia inscrita en él viene dado en función de los ángulos de dicho triángulo por*

$$\tan r = \frac{\sqrt{-\cos S\ \cos(S-A)\ \cos(S-B)\ \cos(S-C)}}{2\cos\frac{A}{2}\ \cos\frac{B}{2}\ \cos\frac{C}{2}},$$

siendo S la semisuma de los ángulos del triángulo.

Proposición 4.7 *Sea ABC un triángulo esférico. Entonces el radio de la circunferencia circunscrita a él viene dado en función de los ángulos de dicho triángulo por*

$$\tan R = \sqrt{\frac{-\cos S}{\cos(S-A)\ \cos(S-B)\ \cos(S-C)}},$$

siendo S la semisuma de los ángulos del triángulo.

Demostración. El punto O, denominado circuncentro, es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo esférico ABC y se obtiene como intersección de los arcos de circunferencias máximas perpendiculares a los lados del triángulo esférico y pasan por el punto medio de cada uno de sus lados.

Uniendo mediante arcos de circunferencias máxima cada vértice con el punto O, obtenemos tres triángulos isósceles, OAB, OBC y OAC, cuyos ángulos iguales son, respectivamente, β, γ y α. Si en el triángulo OBC trazamos su altura se obtienen los triángulos esféricos OBM y OCM cuyo ángulo M es recto.

Figura 4.3

Aplicando el Pentágono de Neper al triángulo rectángulo OBM se tiene

$$\cos\gamma = \cot OB \, \cot\left(90^{\text{o}} - \frac{a}{2}\right),$$

Puesto que el arco de circunferencia máxima OB es el radio R de la circunferencia circunscrita entonces

$$\tan R = \frac{\tan\dfrac{a}{2}}{\cos\gamma}.$$

Por otro lado, se cumple que

$$A + B + C = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma \Rightarrow 2(\alpha + \beta + \gamma) = 2S.$$

Luego

$$\gamma = S - \alpha - \beta = S - A \Rightarrow \tan R = \frac{\tan\dfrac{a}{2}}{\cos(S - A)}.$$

Recordando que

$$\tan\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S \, \cos(S - A)}{\cos(S - B)\, \cos(S - C)}},$$

finalmente queda

$$\tan R = \sqrt{\frac{-\cos S}{\cos(S - A)\cos(S - B)\cos(S - C)}}.$$

Proposición 4.8 *Sea ABC un triángulo esférico. Entonces el radio de la circunferencia circunscrita a él viene dado en función de los lados de dicho triángulo por*

$$\tan R = \frac{2\,\text{sen}\,\dfrac{a}{2}\ \text{sen}\,\dfrac{b}{2}\ \text{sen}\,\dfrac{c}{2}}{\sqrt{\text{sen}\,p\ \text{sen}\,(p - a)\ \text{sen}\,(p - b)\ \text{sen}\,(p - c)}},$$

siendo p el semiperímetro.

4.2. Aplicaciones en Navegación

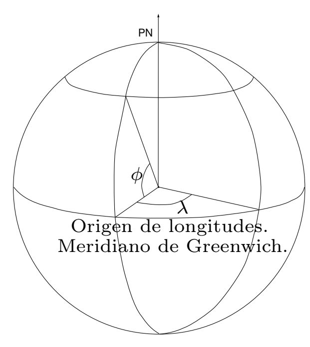


Figura 4.4: Latitud y longitud

Proposición 4.9 *La longitud de un arco de circunferencia es a la longitud total de la circunferencia como el número de grados del ángulo central del arco es a 360º; es decir,*

$$L = \frac{\pi R n}{180},$$

siendo R y n, el radio de la circunferencia y el número de grados del ángulo central, respectivamente.

Definición 4.2 *Considerando la Tierra como una esfera de radio 6370 Km., se llama* milla geográfica *o* milla marina[3] *a la longitud del arco subtendido por un ángulo de un minuto.*

Definición 4.3 *Se denomina* meridiano *de un lugar a la circunferencia máxima de la Tierra que pasa por dicho lugar y por los polos norte y sur terrestres.*

Se denomina paralelo *de un lugar a la circunferencia paralela al Ecuador que pasa por el lugar.*

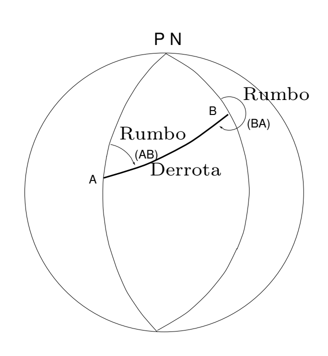


Figura 4.5: Rumbo y derrota

Definición 4.4 *Se denomina* latitud *de un lugar al ángulo central que subtiende el arco del meridiano del lugar comprendido entre el Ecuador y el lugar. La latitud se mide a partir del Ecuador hacia el norte o hacia el sur, de* 0° *a* 90°.

Se denomina longitud *de un lugar al ángulo central que subtiende el arco del Ecuador comprendido entre el meridiano cero* [4] *y el meridiano del lugar. Aunque no de forma general, la longitud se mide a partir del meridiano de Greenwich hacia el este y hacia el oeste de* 0° *a* 180°.

Corolario 4.2 *Todos los puntos de un meridiano tienen la misma longitud y todos los puntos de un paralelo la misma latitud.*

Definición 4.5 *Se denomina* ruta *o* derrota *entre dos puntos la trayectoria que une el punto de partida con el punto de llegada.*

Se denomina rumbo geográfico *de una ruta en un punto al ángulo que forma el meridiano que pasa por dicho punto con la ruta. Se mide de* 0° *a* 360° *a partir del arco de meridiano que une el punto con el polo norte.*

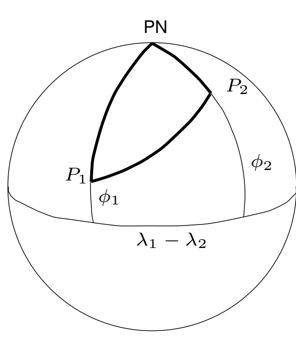


Figura 4.6

Se denomina derrota ortodrómica *a la derrota que sigue un arco de circunferencia máxima, y se denomina* derrota loxodrómica *a aquella en la que el rumbo seguido es constante en todos los puntos de la ruta.*

A partir de estas definiciones se pueden plantear diversos problemas de navegación: cálculo de rumbos, determinación de la distancia mínima entre dos puntos de la superficie terrestre, estima de tiempos de llegada a destino de barcos o aviones, etc.



[3] 1 milla geográfica = 1.853 metros = 1.15 millas terrestres.
[4] El meridiano cero, meridiano de referencia u origen de longitudes es el meridiano que pasa por Greenwich (Observatorio Real de Greenwich).

En cualquier caso, el problema consiste en la resolución de triángulos esféricos. El triángulo esférico básico en cualquier situación de navegación viene dado por las coordenadas geográficas de los dos puntos inmiscuidos; esto es, si los vértices vienen dados por ambos puntos y el polo norte de la Tierra, los lados serán las colatitudes respectivas y la derrota ortodrómica seguida, y los ángulos, respectivos al polo norte y a ambos puntos de la superficie terrestre, serán la diferencias de longitudes, y los rumbos recíprocos, respectivamente.

4.3. Problemas

1. Demostrar que el radio de la circunferencia inscrita a un triángulo esférico en función de los ángulos de dicho triángulo y su semisuma viene dado por:

$$\tan r = \frac{\sqrt{-\cos S\,\cos(S-A_2)\,\cos(S-A_2)\cos(S-A_3)}}{2\cos\dfrac{A_1}{2}\,\cos\dfrac{A_2}{2}\,\cos\dfrac{A_3}{2}}$$

2. Demostrar que el radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo esférico viene dado en función del semiexceso esférico por:

$$\tan R = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} E}{\operatorname{sen}(A_1-E)\,\operatorname{sen}(A_2-E)\,\operatorname{sen}(A_3-E)}}$$

3. Demostrar que el radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo esférico en función de los lados de dicho triángulo viene dado por

$$\tan R = \frac{2\operatorname{sen}\dfrac{l_1}{2}\,\operatorname{sen}\dfrac{l_2}{2}\,\operatorname{sen}\dfrac{l_3}{2}}{\sqrt{\operatorname{sen}p\,\operatorname{sen}(p-l_1)\,\operatorname{sen}(p-l_2)\,\operatorname{sen}(p-l_3)}},$$

   siendo p el semiperímetro.

4. Demostrar que si en un triángulo esférico se conocen dos lados, l_2 y l_3, y el ángulo comprendido, A_1, el exceso esférico de dicho triángulo viene dado por

$$\tan\frac{\epsilon}{2} = \frac{\tan\dfrac{l_2}{2}\operatorname{sen}\dfrac{l_3}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}}{\cos\dfrac{l_3-\varphi}{2}}\operatorname{sen}A_1,$$

   siendo $\varphi = 2\arctan\left(\tan\dfrac{l_2}{2}\cos A_1\right)$.

5. Demostrar que el área de un triángulo esférico, suficientemente pequeño, perteneciente a una esfera de radio R es igual al área de un triángulo rectilíneo cuyos lados tengan igual longitud que los lados del triángulo esférico

y, además, los ángulos del triángulo esférico son iguales a los del triángulo rectilíneo aumentados en la tercera parte del exceso esférico dividido por el radio al cuadrado.

6. De un punto A cuya situación geográfica es $(\phi_A\, N, \lambda_A\, E)$ sale un dirigible a las h horas de la mañana con velocidad v_A kilómetros por hora recorriendo el paralelo hacia el oeste.

   De otro punto B cuyas coordenadas son $(\phi_B\, N, \lambda_B\, E)$ sale en su persecución un avión con velocidad v_B kilómetros por hora y navegando por círculo máximo logra alcanzarle a las H horas de la tarde. Hallar la hora de salida del avión.

7. De un punto C situado en el Ecuador sale un buque A que después de recorrer $8300\, Km.$ alcanza la latitud $\phi = 60^o\, N$ encontrándose el este del meridiano de C. Otro buque B, que sale del mismo punto, alcanza la latitud $\phi = 40^o\, N$, encontrándose también al este del meridiano de C después de recorrer $6000\, Km.$ Determinar la distancia entre ambos buques.

8. De dos puntos A y B situados en el mismo meridiano y en el mismo hemisferio, a $800\, Km.$ de distancia, parten simultáneamente dos móviles recorriendo cada uno su paralelo en el mismo sentido y con velocidades iguales a $100\, Km/h$. El paralelo de A es $2000\, Km.$ más largo que el paralelo de B. Determinar la distancia a que se encuentran uno de otro a los tres días de haber emprendido la marcha.

9. Un dirigible salió de un punto A del hemisferio sur con velocidad de 200 Km/h a las 3^h de la tarde del día 26 de abril. Navegó por círculo máximo y al salir de A tomó rumbo $N\, 52^o\, E$. A las 10^h de la mañana del día 27, cruzó el primer meridiano con rumbo $S\, 28^o\, W$ al $N\, 28^o\, E$, y aterrizó el día 28 a las 6^h de la tarde en B. Determinar las coordenadas geográficas de A y B.

10. En una esfera de $4\, m.$ de radio se tiene el triángulo ABC cuyo lado $BC = 3\, m.$ Desde los puntos B y C como polos y con radios esféricos iguales a la mitad de BC, se trazan los arcos MD y ME, que rectificados miden, respectivamente, 1 y 2 metros. Calcular los lados del triángulo ABC.

11. Un aeroplano que partió de un punto situado en $\phi = 40^o\, N$ y $\lambda = 1^h\, 35^m\, E$ a las 9^h de la mañana, aterrizó al día siguiente a las $5^h\, 45^m$ de la mañana en un punto cuyo meridiano dista $3008,75\, Km.$ hacia el este del meridiano del punto de partida, contando esta distancia sobre el paralelo de este último punto. El aeroplano marchó siempre en dirección este tratando de seguir su paralelo pero no tuvo en cuenta que durante todo el viaje sometido a un viento del norte que le arrastraba $4\, m/seg$ hacia el sur. Determinar la posición geográfica del punto de aterrizaje y la velocidad del aeroplano.

12. Tres estaciones A, B y C de seguimiento espacial ocupan los vértices de un triángulo trirrectilátero. Una de ellas, la A, se encuentra en el punto

en el que el meridiano de Greenwich corta al ecuador. La B se encuentra en el polo ártico y la C al este de la A. Con motivo del lanzamiento de una cápsula espacial, el buque encargado de recogerla a su regreso a la Tierra recibe la orden de situarse sobre el paralelo $30^o\,N$ y en una posición interior al triángulo formado por las tres estaciones, equidistante de A y C. Si la cápsula cae al mar en el punto de coordenadas $\phi = 40^o\,20'\,N$ y $\lambda = 27^o\,40'\,E$, calcular el tiempo que tardará en llegar a recogerla sabiendo que el buque navega a 25 nudos.

13. Considerando el radio terrestre igual a $6370\,Km.$, hallar la distancia más corta entre Nueva York ($\phi = 40^o\,43'\,N$, $\lambda = 74^o\,W$) y Ciudad del Cabo ($\phi = 36^o\,56'\,S$, $\lambda = 18^o\,29'\,E$). Hallar también la dirección de cada una de las ciudades con respecto a la otra.

14. Un avión sale de Lima ($\phi = 12^o10'S$, $\lambda = 77^o05'W$) y vuela dirección a Roma ($\phi = 41^o53'N$, $\lambda = 12^o33'E$). Calcular la distancia recorrida en millas náuticas y la longitud en la cual el avión atraviesa el Ecuador.

15. Un barco navega 200 millas hacia el este a lo largo del paralelo de latitud 42° N. ¿Cuál es la longitud del punto de llegada si parte de la longitud 125°?

16. Calcular la distancia más corta en el viaje de un avión desde San Francisco ($\phi = 37^o40'N$, $\lambda = 122^o25'W$) a Tokio ($\phi = 35^o48'N$, $\lambda = 139^o45'E$). Calcular la longitud y latitud del punto más al norte de la ruta.

17. En una esfera de radio 124 metros, se une el polo O del círculo inscrito en un triángulo trirrectángulo ABC con los puntos M y N tales que $AN = BM = 26^o50'30''$. Determinar el área del triángulo esférico OMN.

18. Sobre una esfera de radio 1458 metros, se tiene un triángulo esférico ABC del cual se conocen $BC = 104^o50'30''$ y los ángulos $B = 63^o54'30''$ y $C = 65^o40'50''$. Se traza un paralelo al círculo BC distante de éste $20^o45'$ que cortan a los lados en M y N. Hallar el área del triángulo esférico AMN.

19. El continente asiático tiene aproximadamente la forma de un triángulo esférico equilátero. Suponiendo que cada lado tiene 4800 millas y que el radio de la Tierra es de 6370 kilómetros. Calcular el área de Asia.

20. Comparar la distancia geográfica mínima y la distancia siguiendo un paralelo entre dos puntos de igual latitud.

21. Dos ciudades A y B están situadas sobre el mismo paralelo. Sabiendo que la distancia existente entre ellas, medida sobre el círculo máximo que las une, es de L kilómetros. Calcular la distancia medida sobre el paralelo.

22. Un buque sale de un punto A suyas coordenadas son: $\phi = 24^o\,40'\,S$ y $\lambda = 3^h\,20^m\,E$, y navegando por círculo máximo con velocidad de 15 millas por hora, tarda $8^d\,20^h$ en llegar a otro punto B. Si el punto B hubiese estado con su misma latitud pero en el meridiano de A, el buque hubiese navegado a 12 millas por hora, hubiera tardado el mismo tiempo. Sabiendo que B

está al norte y al oeste de A, determinar su posición geográfica.

23. Conocidas las posiciones de Madrid ($\phi = 40^o24'30''N$, $\lambda = 0^h14^m45^s09W$) y Buenos Aires ($\phi = 34^o35'40''S$, $\lambda = 3^h53^m28^s5W$), determinar las de un punto del hemisferio norte que dista 10000 kilómetros de ambas poblaciones.

24. Un avión sale de Madrid hacia un punto que equidista de Madrid y de los polos de la Tierra, pero se ve obligado a aterrizar a los 2/3 de su camino y hacia el este de Madrid. Determinad la posición geográfica del punto de aterrizaje.

25. Un buque zarpa de un puerto A situado en el hemisferio sur y, haciendo un rumbo inicial de 35°, navega hasta cortar al Ecuador en un punto B, momento en que cambia su rumbo a 315° y sigue, siempre navegando por círculo máximo, hasta cortar al meridiano del puerto de origen en un punto C cuya longitud es de $16^o\,40'\,E$. Si el buque navega a 20 millas por hora y el tramo AB ha tardado en recorrerlo 8 días y 20 horas, ¿cuáles son las coordenadas de los puntos A, B y C? ¿Cuál es la distancia recorrida por el buque?

26. Un avión parte de un punto cuya latitud es $7^o\,N$ con rumbo 68° dando la vuelta a la Tierra siguiendo un círculo máximo. ¿Cuál es la máxima latitud norte alcanzada? ¿Qué tiempo tarda en alcanzarla si vuela a una velocidad de 400 millas por hora?

27. El profesor Enrique Pardo durante su estancia en la Universidad de Santa Bárbara (California), se marchó un día de visita a San Francisco. Paseando por la ciudad llegó a su ayuntamiento y allí se encontró con una inscripción donde aparecían las coordenadas de esta ciudad ($\phi_{SF} = 37^o47'N$, $\lambda_{SF} = 122^o25'W$). De regreso a Santa Bárbara comprobó que la autopista seguía el paralelo durante 70 Kms. hacia el oeste y luego hacia el sur durante 450 Kms. Al profesor Pardo le gustaría saber las coordenadas de Santa Bárbara y la distancia desde la ciudad hasta Cádiz ($\phi_C = 36^o28'N$, $\lambda_C = 24^m50^sW$). ¿Podéis ayudarle?

II. Introducción a la Astronomía de Posición

La Astronomía de Posición es la ciencia que estudia la posición y movimiento de los cuerpos materiales del universo en el espacio y en el tiempo, mediante medidas efectuadas en observaciones astronómicas.

La posición de un cuerpo en el espacio se establece mediante una relación espacial respecto a un sistema de referencia determinado. Por ello es una posición relativa que depende de la elección del sistema de referencia. Podemos, pues, definir la posición de un cuerpo en el espacio como el lugar geométrico que ocupa con respecto a un sistema de referencia elegido en ese espacio.

El movimiento de los cuerpos materiales del universo se define como el cambio de posición que experimentan con respecto al tiempo. El movimiento se determina respecto a un sistema de referencia espacio-temporal, es decir, además de referir las posiciones del cuerpo en movimiento respecto a un sistema de referencia espacial, será necesario establecer un sistema de referencia temporal que permita correlacionar, mediante una métrica –escala de tiempo– establecida a priori en este sistema, las posiciones sucesivas que el cuerpo va ocupando.

Así pues, el problema básico de la Astronomía de Posición consiste en la elección adecuada de sistemas de referencia para determinar la posición y el movimiento de los cuerpos del universo. De esta elección dependerán los principios y métodos que se utilizarán en las observaciones astronómicas, que constituyen el fundamento empírico de la Astronomía.

Los cuerpos materiales están dotados de movimiento en el espacio y tiempo absolutos, pues el espacio y tiempo definidos en aquéllos proporcionan sistemas de referencia absolutamente fijos. No obstante, el espacio y el tiempo absolutos son inaccesibles a la experimentación directa, por lo que los posibles sistemas de referencia que podamos materializar serán siempre relativos, aunque se perseguirá que dicho sistema relativo sea inercial, esto es, dotado de movimiento uniforme en donde se cumplen las leyes de la mecánica newtoniana y el postulado de relatividad.

El capítulo 5 comienza con la descripción de la *esfera celeste*, que es el modelo más intuitivo del Universo, y sus elementos geométricos principales. Estos elementos posibilitan la definición y establecimiento de los diferentes *sistemas de coordenadas astronómicos*. Con este fin se efectúa un repaso del espacio euclídeo tridimensional y de los sistemas de coordenadas cartesianas y coordenadas polares o esféricas definidos en tal espacio. Estos sistemas de coordenadas no son aplicables en Astronomía, puesto que las enormes dimensiones del universo hacen que resulte dificultoso y poco práctico utilizar coordenadas espaciales lineales. En ciertas aplicaciones, como por ejemplo en el estudio de la dinámica de los astros del Sistema Solar, sí serán utilizables pero, en general, se establecen sistemas de coordenadas basados en magnitudes angulares que determinen las direcciones espaciales de los astros.

Para determinar la posición de un punto sobre la esfera celeste será necesario fijar un *origen*,

un *círculo máximo fundamental*, un *punto arbitrario* de este círculo fundamental y un *sentido de medida de ángulos*, de forma que la elección de estos elementos de la esfera celeste dará lugar a los diferentes sistemas de coordenadas que se utilizan en Astronomía.

Como origen del sistema de referencia podemos elegir entre el lugar de observación, el centro de masas de la Tierra o geocentro y, para algunos propósitos específicos, el centro dinámico del Sistema Solar. Los círculos máximos susceptibles de ser elegidos como círculo fundamental son el horizonte y el ecuador celestes y la eclíptica. El punto sur celeste, el punto Q' y el punto Aries son los puntos que en los diferentes sistemas de coordenadas pueden ser elegidos como puntos fundamentales y finalmente, los sentidos de medidas angulares serán: el sentido retrógrado y el sentido directo.

Obviamente, la elección de estos elementos ha de ser apropiada; es decir, no podremos elegir simultáneamente en un mismo sistema de referencia, el horizonte y el centro dinámico del Sistema Solar. Atendiendo a este principio, en esta sección se definen los sistemas de coordenadas: altacimutal u horizontal, ecuatorial horario, ecuatorial absoluto, eclíptico y galáctico.

El origen, el círculo fundamental, el punto fundamental y el sentido de medida de ángulos elegidos para el *sistema altacimutal* son el lugar de observación, el horizonte celeste, el punto sur celeste y el sentido retrógrado; para el *sistema horario* son el geocentro, el ecuador celeste, el punto Q' y el sentido retrógrado; para el *sistema absoluto* son el geocentro, el ecuador celeste, el punto Aries y el sentido directo; para el *sistema eclíptico* son el geocentro, la eclíptica, el punto Aries y el sentido directo y para el *sistema galáctico* son el geocentro, el ecuador galáctico, el centro galáctico celeste y el sentido directo.

Las coordenadas astronómicas materializadas por el sistema altacimutal son el *acimut* y la *altura*; por el sistema horario, el *ángulo horario* y la *declinación*; por el sistema absoluto, la *ascensión recta* y, también, la *declinación*; por el sistema eclíptico, la *longitud* y *latitud eclípticas* y por el sistema galáctico, la *longitud* y *latitud galácticas*.

Una vez definidos estos sistemas de referencia se analiza en profundidad las transformaciones entre las coordenadas horizontales, horarias y absolutas, entre las coordenadas absolutas y eclípticas y entre las coordenadas absolutas y galácticas de un astro.

Destacar que para efectuar el cambio entre las coordenadas horarias y absolutas se define la *hora sidérea local* en un instante determinado como la suma entre la ascensión recta del astro y el ángulo horario del mismo en ese instante. Este resultado constituye la *relación fundamental de la Astronomía de Posición* y expresa una forma de medida del tiempo como una medida angular puesto que ambas coordenadas lo son.

Para el estudio de sistemas binarios de estrellas o de un planeta y sus satélites se introduce el *sistema de coordenadas relativas* definido por el *ángulo de posición* y la *distancia angular*.

El capítulo 6 se ocupa del movimiento en sentido retrógrado de los astros alrededor del eje celeste como consecuencia del movimiento de la Tierra en sentido directo alrededor de su eje de rotación. Debido a este movimiento, denominado *movimiento diurno*, cada astro describe un paralelo celeste, empleando 24^h sidéreas en recorrerlo. En este recorrido el astro ocupa ciertas posiciones particulares sobre la esfera celeste.

En base al movimiento diurno se definen las *culminaciones* de un astro como cada una de las

dos posiciones que ocupa el astro a su paso por el meridiano del lugar; distinguiéndose entre *culminación superior* y *culminación inferior*, según que esté sobre el meridiano superior o inferior, respectivamente.

El análisis de las culminaciones de un astro consiste en obtener las coordenadas astronómicas de estas posiciones en función de la latitud del lugar de observación, de la declinación del astro y, por supuesto, de la situación relativa de estos elementos en el meridiano del lugar.

A modo de ejemplo, y dado el elevado número de casos que pueden ocurrir, se analizan para un lugar del hemisferio norte terrestre, y en función de la culminación superior, las culminaciones de un astro del hemisferio norte celeste cuando culmine entre el polo norte celeste y el cénit, y cuando la culminación superior se produzca entre el cénit y el punto Q'.

El concepto de *astro circumpolar* se introduce a partir de su culminación superior; de forma que será circumpolar si dicho astro, para un lugar del hemisferio norte, tiene su culminación superior entre el polo norte celeste y el cénit o si culmina entre el polo sur celeste y el cénit para un lugar del hemisferio sur.

Otras posiciones particulares que produce el movimiento diurno de un astro son las denominadas *posiciones correspondientes*, que son, simplemente, aquellas posiciones del paralelo celeste descrito por el astro simétricas respecto del meridiano del lugar. Estas posiciones tienen igual altura, los acimutes respectivos suman 360° y los ángulos horarios 24^h.

Dentro de las posiciones correspondientes de un astro se distinguen las *máximas digresiones*, el *orto* y el *ocaso*, y el *paso por el primer vertical*. Las posiciones de máximas digresiones son cada una de las dos posiciones correspondientes de un astro tales que el vertical que pasa por ellas es tangente al paralelo celeste descrito por el astro en su movimiento diurno. El orto y ocaso de un astro son las posiciones correspondientes que se obtienen como la intersección del paralelo descrito por el astro con el horizonte celeste. Las posiciones de paso de un astro por el primer vertical son las posiciones correspondientes que se obtienen como la intersección del paralelo celeste descrito por el astro con el primer vertical. Según que estas posiciones estén más próximas al oeste o al este se distingue entre máxima digresión occidental y oriental, ocaso y orto y paso por el primer vertical oeste y este.

Se establecen las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de máximas digresiones, de orto y ocaso y de paso por el primer vertical, en función de la declinación del astro y de la latitud del lugar. Asimismo, se obtienen las expresiones que permiten calcular las coordenadas horizontales y horarias de estas posiciones; basándonos en la resolución de triángulos esféricos rectángulos en el caso de las máximas digresiones y de triángulos rectiláteros en el caso del orto y ocaso y del paso por el primer vertical.

El estudio del movimiento diurno del Sol proporciona interesantes definiciones. Así, con respecto a sus culminaciones definiremos: el mediodía y la medianoche y el día solar; con respecto al orto y ocaso se definen: la noche y el día y el crepúsculo. Se hace constar que, si bien se considera que el paralelo celeste descrito por el Sol en su movimiento diurno tiene declinación constante, debido al movimiento anual no es así, puesto que la declinación del Sol varía entre el valor positivo y negativo de la oblicuidad de la eclíptica. Consecuentemente, a lo largo del año variarán los instantes de orto y ocaso, de paso por el primer vertical y de máxima digresión del Sol para un determinado lugar.

El capítulo 7 está dedicada al estudio del tiempo y su medida. Como ya hemos dicho, el objeto fundamental de la Astronomía de Posición es la determinación precisa de las posiciones de los astros y los cambios que en éstas se producen. Por ello, se hace imprescindible establecer alguna variable que nos mida estas variaciones posicionales. Si nos referimos al Universo el *tiempo* es la variable que describe los cambios que experimentan las coordenadas espaciales de los astros, estando, pues, íntimamente relacionado con la idea de movimiento.

El tiempo consiste fundamentalmente en la ordenación de diferentes estructuras espaciales sucesivas o sucesos con respecto a otras estructuras sucesivas elegidas como base de comparación.

Según se elijan los sucesos de referencia tendremos diferentes métodos de medida del tiempo. Estos métodos se pueden agrupar básicamente en dos categorías. La primera de ellas se reduce a contar *sucesos periódicos*; por ejemplo, las oscilaciones de un péndulo, de un cristal de cuarzo o de un átomo excitado. La segunda categoría consiste en el estudio y medida de movimientos continuos, por ejemplo, el movimiento de rotación o traslación de la Tierra. Las posiciones sucesivas del movimiento continuo constituyen una serie ininterrumpida de sucesos que están definidos por los espacios recorridos en dicho movimiento; considerándose, por definición, que las duraciones entre dos sucesos o intervalos de tiempo son iguales cuando los espacios recorridos son iguales.

Una escala de tiempo se establece adoptando un intervalo unidad entre dos sucesos o posiciones arbitrarias y un suceso o posición origen o cero de la escala. Las características principales de una escala de tiempo son: la uniformidad, la estabilidad, la exactitud, la precisión y la accesibilidad. En cualquier caso, tanto la definición como la medida del tiempo se reducen al establecimiento de una *escala de tiempo uniforme* que responda a dos problemas fundamentales en Astronomía: el orden en que acaecen los sucesos, o cronología, y la cronometría o medida de su duración.

Atendiendo a los fenómenos en que se basen, las escalas de tiempo se dividen en: escalas de tiempo astronómicas y escalas de tiempo físicas. Las escalas astronómicas se basan en los movimientos de rotación y traslación terrestre y las escalas físicas en las transiciones del átomo de cesio.

Si consideramos el movimiento de rotación de la Tierra se obtienen *escalas de tiempo rotacionales.* Las sucesivas posiciones de la Tierra en su movimiento de rotación, se pueden determinar, respecto a un lugar de observación situado sobre la superficie terrestre, por el valor del ángulo horario de los astros, de forma que el movimiento continuo de la rotación terrestre se determina por medidas angulares que establecen una correspondencia entre los valores de los ángulos y la variable tiempo. La medida del tiempo se reduce así a medidas de ángulos. El ángulo horario del Sol determina el *tiempo solar verdadero*, mientras que el ángulo horario del punto Aries determina el *tiempo sidéreo.*

Para fijar una escala de tiempo rotacional, la unidad astronómica fundamental adoptada es el *día solar verdadero* y el *día sidéreo*, definidos como el intervalo de tiempo necesario para que el ángulo horario del Sol o del punto Aries, aumente 24^h, o también como el intervalo de tiempo transcurrido entre dos culminaciones superiores sucesivas del Sol o del punto Aries.

La escala de tiempo sidéreo no es uniforme debido a la precesión y a la nutación. Tampoco lo es la escala de tiempo solar ya que la Tierra no es un sólido indeformable y, además, las irregularidades de la rotación terrestre hacen fluctuar la duración del día solar. Esta dificultad se solventa definiendo un Sol ficticio, que es un punto teórico que se mueve sobre la eclíptica con movimiento uniforme coincidiendo con el Sol verdadero en el perigeo y en el apogeo. Aun así, el Sol ficticio presenta aceleraciones debido a la variación no uniforme de la declinación. Por ello, se define finalmente un

Sol medio que se mueve sobre el ecuador celeste con movimiento uniforme y coincidiendo con el Sol ficticio en los equinoccios. A partir de este Sol se definen la *escala de tiempo solar medio*, la *escala de tiempo civil*, la *escala de tiempo oficial* y la *escala de tiempo universal*. Asimismo, se establece la relación entre el tiempo medio y el tiempo verdadero, denominada *ecuación de tiempo*, que se descompone en la ecuación de centro y la reducción al ecuador.

Para evitar las irregularidades que la rotación terrestre introduce en la determinación del tiempo, se recurre a definir escalas de tiempo astronómicas basadas en el movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol, que se traduce en el movimiento aparente del Sol respecto de la Tierra. Como en estas escalas de tiempo la unidad es el año, se definen el *año sidéreo*, el *año trópico* y el *año anomalístico*, respectivamente, por el intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol en su movimiento de traslación por un determinado punto arbitrario de la esfera celeste, por el punto Aries o por el perigeo de la órbita solar. Este mismo fenómeno se utiliza para definir la *escala de tiempo de efemérides*, que se establece a partir de las longitudes eclípticas medias del Sol, y cuya unidad es el *segundo de efemérides*.

Para efectuar cambios entre las escalas de tiempo sidéreo y tiempo solar medio se obtiene la relación entre el día sidéreo y el día verdadero y, a partir de ella, el factor de conversión entre intervalos de tiempo sidéreo y medio. Para este mismo fin, se explica el concepto de *hora sidérea a las 0 horas de tiempo universal*.

Aunque las escalas de tiempo de efemérides y de tiempo medio son bastante uniformes, en la actualidad, y gracias al desarrollo de los relojes atómicos, se establece una escala de tiempo física denominada *escala de tiempo atómico*.

La escala de tiempo atómico se basa en las transiciones del átomo de cesio 133 entre dos niveles hiperfinos de su estado fundamental, adoptándose el *segundo atómico* como la unidad de dicha escala. Éste se define como la duración de 9192631770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los niveles comentados. Esta escala presenta la gran ventaja de su accesibilidad inmediata. Modificaciones a esta escala determinan la *escala de tiempo atómico internacional*, la *escala de tiempo dinámico terrestre*, la *escala de tiempo dinámico baricéntrico* y la *escala de tiempo universal coordinado*.

En la última parte de esta sección, se describe el concepto de *calendario* como cualquier sistema arbitrario de subdividir una escala temporal para medir convenientemente el tiempo según las necesidades de la vida social. De este modo, en cualquier calendario podemos distinguir la escala de tiempo y la estructuración arbitraria de dicha escala. El origen adoptado en un calendario determina la *era cronológica*.

Aun siendo conscientes de que cada sociedad en el devenir histórico ha establecido su propio calendario, nos hemos centrado en el calendario gregoriano. Se efectúa un sucinto desarrollo de la evolución histórica de este calendario a partir del calendario egipcio y pasando por el calendario juliano. Se analizan los problemas que se han presentado a lo largo de su evolución y las soluciones adoptadas.

Finalmente, se definen la *fecha juliana* como el cómputo consecutivo de los días solares medios a partir del año 4713 antes de Cristo a las 12 horas de tiempo universal; y la *fecha juliana modificada*, que no es sino la fecha juliana menos 2400000.5 días medios, y que se utiliza actualmente en Geodesia Espacial.

Los diferentes sistemas de coordenadas astronómicos se han establecido en el capítulo 5 en base a elementos de la esfera celeste –origen, plano y punto fundamentales– invariantes y, además, se ha considerado la Tierra esférica, con movimiento de rotación uniforme y carente de atmósfera. Sin embargo, las posiciones aparentes de los astros en el cielo están afectadas de ciertos fenómenos que originan pequeños desplazamientos de las direcciones de los objetos celestes respecto de la dirección geométrica teórica definida por tales sistemas de referencia.

En el capítulo 8 nos ocupamos del estudio de estos fenómenos y de cómo afectan a las coordenadas de los astros; obteniendo las expresiones que rigen las correcciones que hay que aplicar a las posiciones aparentes para obtener las posiciones precisas de los astros. Estos fenómenos se dividen en: geométricos y físicos. Los efectos geométricos afectan directamente a uno o varios elementos fundamentales del sistema de referencia considerado. A este grupo pertenecen la *paralaje diurna*, la *paralaje anua*, la *precesión* y la *nutación*. Los efectos físicos afectan directamente a la dirección aparente de los objetos celestes. A este grupo pertenecen la *refracción atmosférica*, la *aberración de la luz* y el *movimiento propio*.

La paralaje es la diferencia que se produce en las coordenadas de un astro causada por el cambio del origen del sistema de referencia; es decir, este efecto geométrico se debe a las posiciones relativas existentes entre los diferentes puntos del espacio susceptibles de ser considerados como origen del sistema de referencia. Para formalizar el concepto de la paralaje se definen las coordenadas topocéntricas, geocéntricas y heliocéntricas y se establecen las expresiones que permiten la transformación entre ellas. Estas expresiones se obtienen considerando el modelo esférico terrestre.

Cuando se realiza un cambio entre orígenes topocéntrico y geocéntrico, este efecto geométrico se manifiesta como el ángulo desde el cual se ve el radio terrestre, denominándose *paralaje diurna*, y cuando el cambio se efectúa entre orígenes geocéntrico y heliocéntrico se denomina *paralaje anua* y es el mayor ángulo subtendido por la distancia Sol-Tierra.

A efectos de complementar dichas expresiones se explican sucintamente otros modelos de representación terrestre: el geoide y el elipsoide de referencia, y se obtienen las anteriores expresiones también respecto al modelo elipsódico.

La paralaje diurna tiene dos aplicaciones de enorme interés astronómico: el cálculo de distancias en el Sistema Solar y la determinación de semidiámetros angulares de astros del Sistema Solar. La paralaje anua permite definir nuevas unidades de distancia: la unidad astronómica y el parsec.

Por otra parte, la Tierra no es una esfera, sino que presenta un abultamiento ecuatorial aproximándose en mayor medida a un elipsoide de revolución achatado por los polos. Debido a este abultamiento ecuatorial, las fuerzas externas que actúan sobre la Tierra en rotación producen un desplazamiento en sentido retrógrado del eje terrestre y, consecuentemente, se generará una variación en las posiciones de los planos fundamentales, es decir, del ecuador celeste y de la eclíptica y, por supuesto, en el punto Aries. Por tanto, variarán las coordenadas ecuatoriales y eclípticas. El desplazamiento del eje de rotación terrestre se descompone en la precesión, o movimiento de largo periodo, y en otro movimiento de corto periodo, denominado nutación.

Cuando la luz procedente de un astro llega hasta un lugar de la superficie terrestre ha tenido que atravesar la atmósfera que rodea la Tierra. Debido a que la atmósfera es un medio dispersivo, no homogéneo ni vacío, la luz sufre desviaciones a medida que la va atravesando. Las desviaciones del rayo luminoso se deben a la refracción que se produce en las diferentes capas atmosféricas. Este

efecto, refracción atmosférica o astronómica, es difícil de modelizar pues depende de las condiciones meteorológicas existentes en el lugar de observación y en el instante en que se realiza la observación del astro. No obstante, existen diversos modelos que dependen del modelo geométrico elegido y del espesor de las capas atmosféricas, de la dirección del rayo luminoso y de la precisión con que se determine el índice de refracción de cada capa.

La aberración es la variación producida en la dirección aparente de un astro por el movimiento relativo del observador con respecto a la velocidad del astro. Si el desplazamiento se debe al efecto combinado de la velocidad de la luz y del movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol entonces se denomina *aberración anua*, y *aberración diurna* si la variación de la posición del astro es consecuencia del movimiento de rotación terrestre y de la velocidad de la luz.

Existe un último efecto que se debe al movimiento rectilíneo y uniforme con que está animada cada estrella respecto a un sistema de referencia invariable en el espacio. Este movimiento es inherente a cada estrella y se denomina *movimiento propio*.

La última sección de este capítulo comienza definiendo *posiciones precisas*, *medias*, *verdaderas*, *aparentes* e *instrumentales* para, a continuación, explicar el proceso de reducción de posiciones de astros. Este proceso está encaminado a la obtención de coordenadas aparentes para un instante determinado a partir de sus coordenadas precisas.

Las coordenadas precisas de un astro son sus posiciones referidas a una determinada época de referencia obtenidas mediante observaciones con instrumentos astronómicos de alta precisión ya corregidas por movimiento propio. Las posiciones medias son sus coordenadas precisas corregidas por precesión; las posiciones verdaderas son las coordenadas medias corregidas por nutación; las posiciones aparentes son las coordenadas verdaderas corregidas por paralaje y aberración anual y las posiciones instrumentales son las coordenadas aparentes corregidas por paralaje, aberración diurna y refracción.

También se establece la noción de *sistemas fundamentales* de estrellas. Las estrellas pertenecientes a estos sistemas están dotadas de *posiciones fundamentales* o *absolutas*, que son las coordenadas determinadas directamente, sin presuponer el conocimiento previo de las posiciones de otros astros. Consecuentemente, se denominan *posiciones relativas* o *diferenciales* a las coordenadas determinadas a partir de coordenadas conocidas de otros astros.

Los sistemas fundamentales se recopilan en *catálogos de estrellas* que contienen sus coordenadas referidas al ecuador y equinoccio medio de una época determinada. Las estrellas pertenecientes a los sistemas fundamentales se utilizan como puntos de referencia respecto de los cuales se pueden determinar las posiciones relativas de los demás astros y, puesto que el ecuador celeste y equinoccio no son observables directamente, éstos se determinan mediante observaciones precisas de estrellas fundamentales.

Finalmente, se explican algunos métodos experimentales para determinar posiciones fundamentales de estrellas y a partir de ellas determinar posiciones relativas de otros astros.

Palabras claves

Astronomía de Posición. Eje, ecuador, polos, hemisferios, meridianos, paralelos, y horizonte terres-

tres. Vertical del lugar. Eje, polos, ecuador, hemisferios, meridianos, paralelos y horizonte celestes. Vertical astronómica, cénit y nadir. Puntos norte, sur, este y oeste celestes, Meridiano del lugar, meridianos superior e inferior. Punto Q'. Vertical celeste y primer vertical. Almicantarat. Meridiana y perpendicular. Acimut, altura y distancia cenital. Ángulo horario, declinación y distancia polar. Eclíptica, Eje, polos y oblicuidad de la eclíptica, Equinoccios y solsticios. Máximos de longitud, paralelos de latitud, primer máximo de longitud y coluros. Banda zodiacal. Trópicos y círculos polares. Ascensión recta y hora sidérea. Longitud y latitud eclípticas. Distancia angular y ángulo de posición. Coordenadas cartesianas y esféricas. Coordenadas horizontales, horarias, absolutas y eclípticas. Sistemas horizontal, ecuatorial horario, ecuatorial absoluto y eclíptico. Coordenadas relativas. Movimiento diurno. Culminaciones de un astro y astros circumpolares. Posiciones correspondientes, máximas digresiones, orto y ocaso y paso de un astro por el primer vertical. Coordenadas topocéntricas, geocéntricas y heliocéntricas. Paralaje, paralaje diurna y paralaje anua. Superficie topográfica, geoide y elipsoide de referencia. Ondulación del geoide y desviación de la vertical. Latitudes geocéntrica, geodésica y astronómica. Semidiámetro angular. Periastro y apoastro. Unidad astronómica, año-luz y parsec. Precesión, precesión lunisolar y precesión planetaria. Nutación. Refracción astronómica. Aberración de la luz, aberración anua y aberración diurna. Movimiento propio. Coordenadas medias, verdaderas, aparentes, instrumentales y precisas. Reducción de posiciones de astros. Posiciones absolutas y relativas. Sistemas fundamentales y catálogo de estrellas. Tiempo y escala de tiempo. Días sidéreo, solar verdadero y solar medio. Tiempo sidéreo, solar verdadero y solar medio. Ecuación de tiempo. Tiempo civil y oficial. Tiempo universal. Tiempo de efemérides. Años sidéreo, trópico y anomalístico. Tiempo atómico. Calendario, periodo juliano y fecha juliana.

Objetivos específicos perseguidos en esta parte del texto

Al igual que en la primera parte siguen siendo válidos como orientación general del texto: la utilización del lenguaje matemático, la resolución de problemas y la conceptualización Así, entre los objetivos específicos que perseguimos destacamos los siguientes:

- Describir el modelo geométrico esférico terrestre; enunciar, definir y describir matemáticamente la esfera celeste y establecer sus elementos principales.
- Establecer, comprender e identificar los sistemas de referencia astronómicos y las coordenadas que definen, y analizar las ventajas e inconvenientes de cada uno de ellos.
- Establecer las diferencias entre los sistemas de referencia euclídeos y astronómicos.
- Enunciar e interpretar la relación fundamental de la Astronomía de Posición.
- Relacionar la Trigonometría Esférica con la Astronomía de Posición y obtener las expresiones para efectuar transformaciones entre los diferentes sistemas de coordenadas.
- Modelizar, analizar e interpretar geométricamente los aspectos resultantes del movimiento diurno.
- Aplicar las estrategias de resolución de triángulos esféricos para resolver las situaciones geométricas resultantes del movimiento diurno.
- Describir, distinguir e ilustrar los movimientos diurno y anual del Sol, sus consecuencias, y

relacionar ambos movimientos.

- Comprender e identificar el tiempo como la variable matemática que describe el movimiento de los cuerpos.
- Identificar e interpretar el concepto de escala de tiempo.
- Enunciar el tiempo rotacional y describir e interpretar las distintas escalas de tiempo rotacionales.
- Analizar y desarrollar el proceso de obtención de una escala de tiempo rotacional uniforme.
- Relacionar los movimientos diurno y anual con las escalas de tiempo rotacionales.
- Enunciar el tiempo de efemérides y el tiempo atómico.
- Describir el proceso histórico del establecimiento del calendario.
- Enunciar los fenómenos físicos que afectan a las coordenadas astronómicas y clasificar dichos fenómenos según el efecto que producen.
- Modelizar estos fenómenos y obtener las expresiones que corrigen estos efectos en las coordenadas astronómicas.
- Describir los diferentes modelos de representación terrestre y las relaciones existentes entre ellos.
- Explicar el proceso de reducción de posiciones de estrellas.
- Saber aplicar los procesos de modelización matemática y reconocer, seleccionar y aplicar las estrategias y técnicas oportunas para resolver problemas procedentes de situaciones astronómicas.
- Interpretar y validar los resultados obtenidos en la resolución de problemas.

El texto estará, pues, dirigido a que el lector comprenda y relacione los sistemas de coordenadas astronómicos, modelice los fenómenos físicos que afectan a dichos sistemas de referencia e interprete e identifique el tiempo dentro del contexto de las matemáticas. Todos estos objetivos constituyen un entramado conceptual cuya comprensión es un objetivo preferente.

Para ello, el alumno debe conocer y recordar los sistemas de coordenadas astronómicos y manejar con soltura los cambios entre ellos, debe asimilar las expresiones que resultan de las modelizaciones efectuadas y debe ser capaz de tratar con rigurosidad dichas expresiones, y debe conocer y recordar las diferentes escalas de tiempo, haciendo un esfuerzo especial en la conceptualización del tiempo dentro del contexto de las matemáticas.

Los aspectos que atañen a los fenómenos físicos que afectan a las coordenadas astronómicas están orientados hacia el proceso de modelización de estos fenómenos. Esta modelización debe responder al establecimiento y resolución de un conjunto de expresiones analíticas, que recojan y representen lo más fielmente posible las principales características del fenómeno real. Estas modelizaciones permiten adentrarse en el proceso matemático de la abstracción; concluyéndose que el proceso de modelización es una estrategia que no solo se debe conocer, sino también, aplicar e interpretar con soltura e imaginación.

5. Sistemas de coordenadas en Astronomía

La Astronomía de Posición es la ciencia que estudia la posición y movimiento de los cuerpos materiales del universo en el espacio y en el tiempo, mediante medidas efectuadas en observaciones astronómicas.

Aunque en este tema se estudian los sistemas de referencia espaciales que se utilizan en Astronomía para establecer las posiciones de los astros, resulta apropiado introducir el concepto de sistema de tiempo que permite referenciar el movimiento de los astros del universo.

La posición de un cuerpo en el espacio se define como el lugar geométrico que ocupa con respecto a un sistema de referencia elegido, y queda determinada por una relación espacial respecto a dicho sistema de referencia de cuya elección dependerá la posición del cuerpo, que será por tanto relativa.

Para establecer un sistema de referencia que permita determinar unívocamente la posición que ocupa un cuerpo en el espacio habrá que definir geométricamente una estructura métrica y topológica en el espacio físico donde se encuentra.

Una idea clásica a este respecto es que el espacio es independiente de los cuerpos que contiene, pues aunque los cuerpos no existiesen los lugares que ocuparían seguirían existiendo. En realidad, un cuerpo ocupa únicamente posiciones correspondientes a puntos del espacio.

El movimiento de los cuerpos materiales del universo se define como el cambio de posición que experimentan con respecto al tiempo. El movimiento se determina respecto a un sistema de referencia espacio-temporal; es decir, además de referir las posiciones del cuerpo en movimiento respecto a un sistema de referencia espacial, será necesario establecer un sistema de referencia temporal que permita correlacionar, mediante una métrica –escala de tiempo– establecida a priori en este sistema, las posiciones sucesivas que el cuerpo va ocupando.

Al igual que sucedía anteriormente, el tiempo es independiente de los cuerpos en movimiento, pues aunque todos los cuerpos existentes en el universo se parasen, el tiempo seguiría fluyendo homogénea y uniformemente, de forma que los cambios experimentados ocurrirían en un instante temporal, pero no serían tiempo en sí.

Así pues, el problema básico de la Astronomía de Posición consiste en la elección adecuada de sistemas de referencia para determinar la posición y el movimiento de los cuerpos del universo. De esta elección dependerán los principios y métodos que se utilizarán en las observaciones astronómicas, que constituyen el fundamento empírico de la Astronomía.

No sólo dependen de la elección del sistema de referencia las observaciones y aplicaciones astronómicas, sino también todas las teorías dinámicas fundamentales

del sistema planetario y del universo estelar.

El modelo de representación del universo cambia de modo esencial según se elija un sistema de referencia u otro; basta recordar el sistema geocéntrico de Ptolomeo y el heliocéntrico de Copérnico. Hasta la aparición en 1687 de los fundamentos de la dinámica clásica y el establecimiento de la ley de gravitación universal por Newton, los sistemas de referencia y, consecuentemente, los modelos de universo, como por ejemplo las Leyes de Kepler, eran descripciones cinemáticas del movimiento de los astros que prescindían de las causas que los originan. De este modo, surge una descripción mecánica –cinemática y dinámica– del universo material.

En este modelo mecánico los movimientos están determinados causalmente por fuerzas bien definidas que obedecen las leyes matemáticas de la cinemática y físico-matemáticas de la dinámica. Este determinismo causal posibilita conocer todas las configuraciones o estados –pasados o futuros– del universo material conociendo uno cualquiera de ellos.

En el modelo newtoniano los cuerpos materiales están dotados de movimiento en el espacio y tiempo absolutos, pues el espacio y tiempo definidos en él proporcionan sistemas de referencia absolutamente fijos, ya que actúan como meros recipientes de los cuerpos y son independientes de éstos:

"...el tiempo absoluto, verdadero y matemático fluye uniformemente en virtud de su propia naturaleza y sin referencia a ningún objeto externo; de igual modo, el espacio absoluto permanece siempre único e inamovible..."(Isaac Newton)

No obstante, el espacio y el tiempo absolutos son inaccesibles a la experimentación directa, por lo que para materializar un sistema de referencia habrá que elegir cuerpos que permitan establecer ejes de coordenadas espaciales y escalas de tiempo a los que referir la posición y el movimiento de otros cuerpos.

Únicamente, si se supone que los cuerpos adoptados como sistemas de referencia permanecen inmóviles con respecto al espacio absoluto, el movimiento referido a este sistema estaría referido al espacio absoluto. Igual sucede con el sistema de tiempo; es decir, si la escala de tiempo adoptada coincide con el tiempo absoluto, la medida del tiempo sería absoluta.

De este modo, se denomina *sistema material de referencia absoluto de espacio o tiempo* a aquel que está inmóvil respecto al espacio o al tiempo absolutos, y *movimiento absoluto o verdadero* al referido a un sistema de referencia material absoluto. Asimismo, se denomina *sistema de referencia relativo de espacio o tiempo* al que se mueve con respecto al espacio o al tiempo absoluto con un movimiento arbitrario cualquiera. El movimiento respecto a tal sistema se llama *movimiento relativo o ficticio*.

Como ya se ha comentado, resulta imposible establecer un sistema de referencia absoluto en el universo; únicamente podremos materializar sistemas relativos espacio-temporales que, por supuesto, están dotados de movimiento. Se denomina sistema inercial a un sistema de referencia dotado de movimiento uniforme y,

por tanto con aceleración nula, en donde se cumplen las leyes de la mecánica newtoniana:

> Ley de la Inercia: “Toda partícula libre en el espacio permanece en reposo o se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme –velocidad constante.”
>
> 2ª Ley de Newton: “Considerando que la masa de una partícula es constante, la aceleración es proporcional a la fuerza resultante que se ejerce sobre ella y tiene la dirección y sentido de dicha fuerza.”
>
> Ley de acción y reacción: “Cuando dos partículas interactúan, la fuerza sobre una partícula es igual y opuesta a la fuerza sobre la otra.”

y el postulado de relatividad:

“Los resultados de todos los experimentos realizados por completo en un cierto sistema de referencia son independientes de cualquier movimiento de traslación uniforme de dicho sistema”.

Aunque a la hora de establecer un sistema de referencia se perseguirá la búsqueda de un sistema inercial en la práctica resultará imposible.La rotación diaria de la Tierra y la interacción con el Sol y los otros planetas producen aceleraciones en el movimiento terrestre, imposibilitando el establecimiento de un sistema inercial en ella.

Igual sucede con el Sol, pues debido a las interacciones con otros cuerpos de la galaxia en su movimiento alrededor de la misma también aparecen aceleraciones.

Si bien el movimiento del Sol es más rectilíneo y uniforme que el de la Tierra y se asemeja en mayor medida a un sistema de referencia inercial, no podremos olvidar que el lugar desde donde realizamos las observaciones astronómicas es la Tierra o sus inmediaciones por lo que, independientemente de cambios posteriores, los sistemas de referencia astronómicos espaciales tendrán como origen el lugar de observación o bien el propio centro de masas terrestre.

Por otra parte, las dimensiones del universo hacen que resulte dificultoso y poco práctico utilizar coordenadas espaciales lineales, de suerte que la posición de un astro se expresa por su dirección espacial y consecuentemente por medidas angulares. A este efecto se considerará que todos los astros se proyectan sobre una esfera de radio unidad.

Tomando como base este modelo esférico del universo se establecerán sistemas de referencia espaciales que permitan resolver el problema del posicionamiento en Astronomía, de forma que un sistema de referencia espacial en Astronomía queda definido mediante el establecimiento de un origen, un plano fundamental, un punto fundamental elegido en dicho plano y un sentido de medida de ángulos.

5.1. La esfera celeste

Definición 5.1 *La Esfera Celeste es una esfera imaginaria de radio arbitrario, con centro en un punto cualquiera del espacio, sobre la cual los astros se proyectan para estudiar sus posiciones relativas.*

Según el origen elegido para la esfera celeste tendremos diferentes sistemas de representación del universo. Así, el origen de la esfera celeste puede ser el lugar de observación sobre la superficie de la Tierra, el centro de la Tierra, el centro del Sol o el centro de otros cuerpos del Sistema Solar, obteniéndose los sistemas topocéntrico, geocéntrico, heliocéntrico y planetocéntrico.

En la mayoría de los problemas astronómicos podemos considerar indistintamente el centro de la Tierra y el lugar de observación como centro de la esfera celeste, ya que la distancia existente entre la Tierra y los astros resulta demasiado grande si se compara con el radio terrestre.

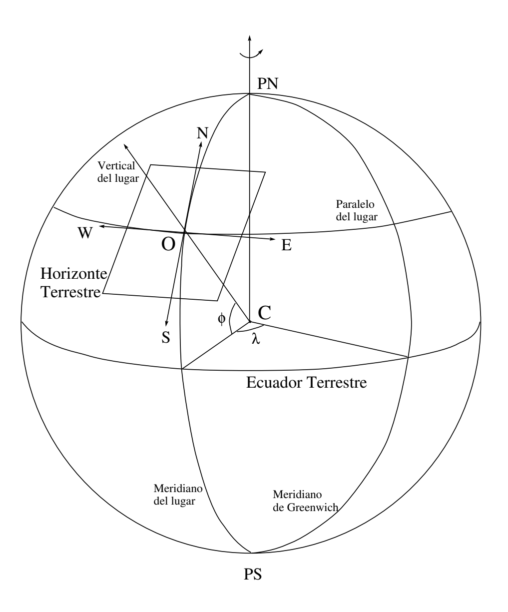


Figura 5.1: Elementos principales del modelo esférico terrestre

Definición 5.2 *Considerando la Tierra como una esfera de radio 6370 Km. y cuyo centro es el centro de gravedad terrestre definimos los siguientes elementos:*

Eje terrestre ... Eje de rotación de la Tierra.

Ecuador terrestre ... Círculo máximo perpendicular al eje terrestre.

Polos terrestres (PN, PS) ... Cada uno de los puntos en que el eje terrestre interseca a la superficie terrestre. Se denomina Polo Norte o boreal al situado en el océano Ártico y Polo Sur o austral al situado en el continente antártico.

Hemisferios terrestres ... Cada una de las dos semiesferas en que el ecuador terrestre divide a la Tierra. Se denominan hemisferio norte y sur a los que contienen respectivamente al polo norte y sur terrestres.

Meridiano terrestre ... Círculo máximo que pasa los polos terrestres.

Paralelo terrestre ... Círculo menor paralelo al ecuador terrestre.

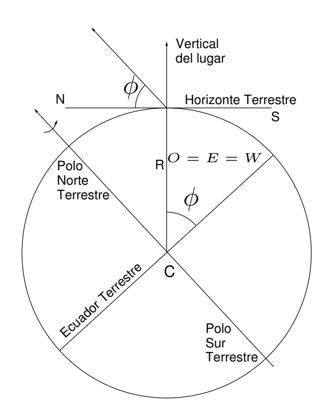
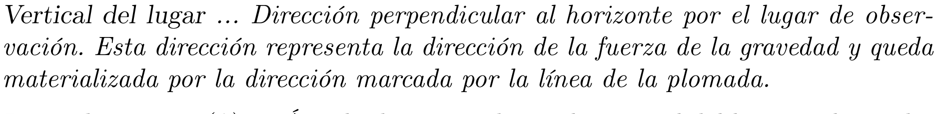


Figura 5.2: Proyección sobre el meridiano del lugar

Lugar de observación ... Lugar situado sobre la superficie terrestre desde el cual se realizan observaciones astronómicas.

Horizonte terrestre ... Plano tangente a la Tierra en el lugar de observación.

Puntos cardinales (N, S, E, W) ... Direcciones norte, sur, este y oeste del horizonte terrestre situadas a 90º entre sí. Las direcciones norte y sur quedan determinadas por la recta tangente al meridiano terrestre que pasa por el lugar de observación. La semirrecta tangente que está dirigida hacia el polo norte terrestre determina la dirección norte y la semirrecta tangente opuesta, la dirección sur. La dirección este se define como la semirrecta del horizonte, perpendicular a la dirección norte-sur, y situada a 90º de la dirección norte en sentido retrógrado. La dirección oeste es la dirección opuesta a la dirección este.



Vertical del lugar ... Dirección perpendicular al horizonte por el lugar de observación. Esta dirección representa la dirección de la fuerza de la gravedad y queda materializada por la dirección marcada por la línea de la plomada.

Latitud terrestre (ϕ) ... Ángulo determinado por la vertical del lugar y el ecuador terrestre. Se denomina colatitud *al ángulo complementario de la latitud ($90^o - \phi$). La latitud se mide de 0º a 90º desde el ecuador terrestre hacia el Polo Norte (latitudes positivas), o hacia el Polo Sur (latitudes negativas), mientras que la colatitud se mide de 0º a 180º desde el polo norte hacia el polo sur.*

Longitud terrestre (λ) ... Ángulo determinado por el meridiano del lugar y el meridiano que pasa por el Observatorio de Greenwich, también denominado origen de longitudes o meridiano cero. La longitud se mide de 0º a 180º hacia el este o hacia el oeste a partir del meridiano de Greenwich.

Todos los puntos de un mismo paralelo tienen igual latitud y todos los puntos de un mismo meridiano igual longitud.

Definición 5.3 *Se definen definir los siguientes elementos de la esfera celeste:*

Eje celeste ... Prolongación del eje terrestre hasta la esfera celeste.

Polos celestes (P, P') ... Cada uno de los puntos en que el eje celeste interseca a la esfera celeste. El polo norte celeste corresponde a la prolongación del eje terrestre en la dirección del polo norte terrestre, y el polo sur celeste a la del polo sur terrestre.

Ecuador celeste ... Círculo máximo de la esfera celeste que resulta de la intersección de dicha esfera con el plano que contiene al ecuador terrestre.

Hemisferios norte y sur celestes ... Cada una de las dos semiesferas en que el

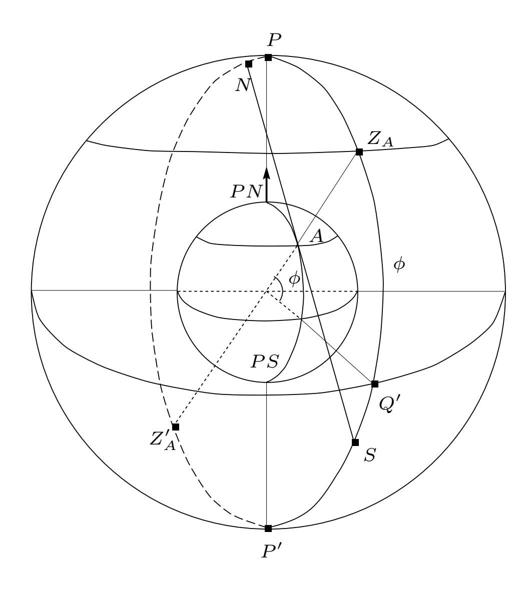


Figura 5.3: La Tierra y la esfera celeste

ecuador celeste divide a la esfera celeste. Se denominan hemisferio norte y sur celestes a los que contienen, respectivamente, al polo norte y sur celestes.

Meridiano celeste ... *Círculo máximo que pasa los polos celestes.*

Paralelo celeste ... *Círculo menor paralelo al ecuador celeste.*

Horizonte celeste ... *Círculo máximo de la esfera celeste que resulta de la intersección de dicha esfera con el plano que contiene al horizonte terrestre.*

Vertical astronómica del lugar ... *Prolongación de la vertical del lugar hasta la esfera celeste.*

Cénit y Nadir (Z, Z') ... *Cada uno de los puntos en que la vertical astronómica del lugar interseca a la esfera celeste. El cénit corresponde a la dirección opuesta al centro de la Tierra y el nadir a la que pasa por el centro de la Tierra.*

Hemisferios visible e invisible ... *Cada una de las dos semiesferas en que el horizonte celeste divide a la esfera celeste. El hemisferio visible contiene al cénit y el invisible al nadir.*

Puntos norte (N), sur (S), este (E) y oeste (W) celestes ... *Puntos del horizonte celeste que se obtienen como intersección de la esfera celeste con las direcciones que definen los puntos cardinales.*

Meridiano del lugar ... *Meridiano celeste que contiene al cénit y al nadir.*

Meridianos superior e inferior ... *Cada uno de los dos semimeridianos en que*

se subdivide el meridiano del lugar. El meridiano superior contiene al cénit y el meridiano inferior al nadir.

Punto Q' ... Punto que resulta de la intersección del meridiano superior con el ecuador celeste.

Vertical celeste ... Círculos máximos que pasan por el cénit y el nadir.

Primer vertical ... Vertical que pasa por los puntos este y oeste.

Almicantarat ... Círculos menores paralelos al horizonte celeste.

Meridiana ... Diámetro intersección del horizonte celeste con el meridiano del lugar. Sus intersecciones con la esfera celeste son los puntos norte y sur celestes.

Perpendicular ... Diámetro intersección del horizonte y ecuador celestes. Sus intersecciones con la esfera celeste son los puntos este y oeste celestes.

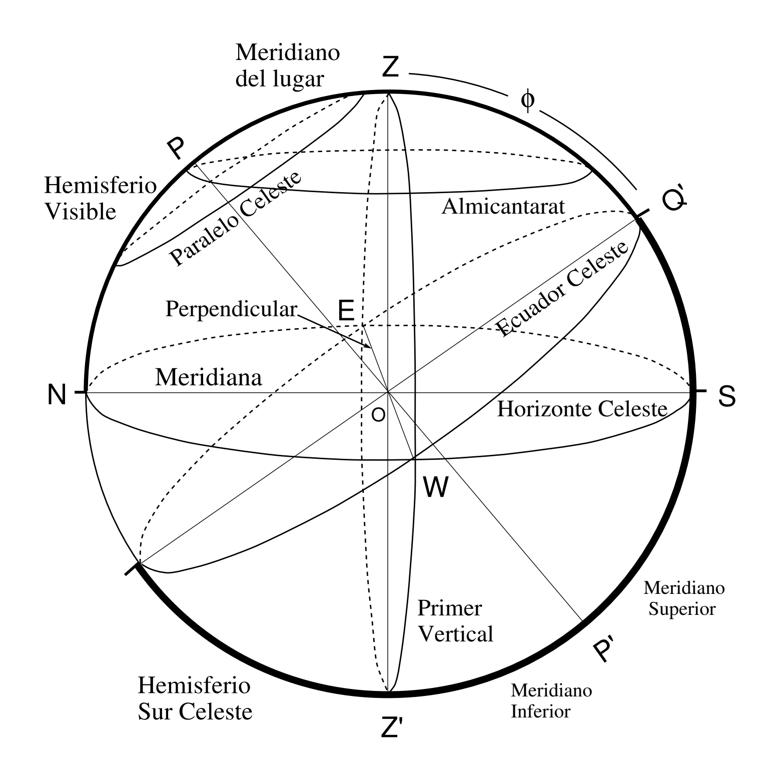


Figura 5.4: Elementos de la esfera celeste (I)

Notemos que en la anterior definición de horizonte celeste, por los motivos expuestos al inicio de esta sección, se identifican el lugar de observación y el centro de gravedad terrestre. Esta aproximación, válida para la mayoría de las ocasiones, habrá de tenerse en cuenta en aquellos problemas astronómicos en donde el radio

terrestre no pueda despreciarse en relación a la distancia a que se encuentre el fenómeno que se desee estudiar.

Podemos redefinir la latitud del lugar de observación como el ángulo formado por la meridiana y el eje celeste, o por el ecuador celeste y la dirección del cénit. Puesto que el radio de la esfera es la unidad, la medida de un arco de círculo máximo será igual a la medida del ángulo central que le subtiende, y en particular, la latitud también podrá definirse como el arco comprendido entre el punto Q' y el cénit.

El meridiano del lugar divide en dos partes iguales al horizonte, a los almicantarats, al ecuador y a los paralelos celestes, siendo perpendicular a ellos. Contiene además los puntos de máxima y mínima distancia de cada paralelo con respecto al horizonte.

5.2. Sistemas celestes

Definición 5.4 *Se llama espacio tridimensional al conjunto de ternas ordenadas de números reales (x,y,z). Cada terna ordenada perteneciente al espacio se denomina punto de ese espacio.*

Definición 5.5 *Un sistema de referencia espacial queda definido por tres rectas no coplanarias cualesquiera que se cortan en un punto. Las tres rectas X, Y y Z y el punto de intersección O se denominan, respectivamente, ejes coordenados y origen de coordenadas.*

Para fijar la posición de un punto en el espacio necesitamos un sistema de referencia respecto del cual podamos ordenar los tres números reales que definen el punto. De esta forma, dados tres números reales tomados en un orden determinado x, y y z, podemos asignar con escala arbitraria a cada número un punto de los ejes X, Y y Z, respectivamente. Los tres planos, que pasando por cada punto son paralelos a los otros dos ejes, se cortan en un punto $P(x, y, z)$ que queda localizado unívocamente respecto del origen de coordenadas O mediante los números reales x, y y z. Estos tres números se denominan coordenadas cartesianas del punto P respecto al sistema de coordenadas $\{O; X, Y, Z\}$.

Definición 5.6 *Se dice que el espacio tiene estructura euclídea, o que es un espacio euclídeo tridimensional, si la distancia entre dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ se expresa mediante la métrica*

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Definición 5.7 *Se denominan coordenadas polares o esféricas de un punto P en un espacio euclídeo tridimensional con respecto a un sistema de referencia $\{O; X, Y, Z\}$ a la terna (ρ, ϕ, θ), donde ρ es el módulo del vector $\overline{OP}$, y ϕ y θ los ángulos determinados por la proyección del vector $\overline{OP}$ sobre el plano OXY con el eje X y con el propio vector, respectivamente. Estas coordenadas también determinan unívocamente la posición del punto respecto del sistema de referencia euclídeo considerado.*

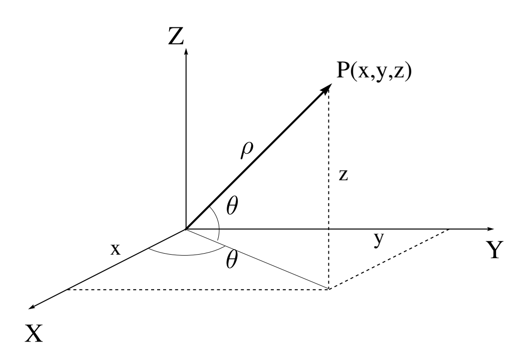


Figura 5.5: Coordenadas cartesianas y polares en el espacio euclídeo tridimensional

Proposición 5.1 *Las fórmulas de transformación de coordenadas polares a coordenadas cartesianas vienen dadas por:*

$$\begin{cases} x = \rho \cos\phi \cos\theta, \\ y = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \\ z = \rho \operatorname{sen}\theta. \end{cases}$$

y recíprocamente, las fórmulas de transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas polares son:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \phi = \arctan \dfrac{y}{x}, \\ \theta = \arctan \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}$$

En Astronomía, la posición de un astro se determina mediante coordenadas polares o esféricas en un espacio métrico euclídeo. Puesto que los astros se sitúan sobre la esfera celeste, la distancia ρ de cualquier astro al origen de coordenadas es, a priori, la unidad. Por tanto, las coordenadas polares se reducen al par (ϕ, θ) que determina unívocamente la dirección del astro. Sin embargo, cuando tratemos de cuerpos del sistema solar o satélites artificiales se tendrá en cuenta la distancia al origen del sistema de referencia. Adoptando el radio unidad[5] el factor ρ desaparece de las expresiones dadas en la proposición 5.1, y el ángulo entre dos direcciones cualesquiera se medirá directamente en unidades de arco sobre círculos máximos de la esfera celeste.

La dirección de los cuerpos celestes queda determinada por las direcciones de sus proyecciones sobre la esfera celeste respecto a un punto situado en su centro, y las

[5] En la antigüedad, se consideraba la esfera celeste con radio “infinitamente grande”.

posiciones relativas de esos puntos, o distancias angulares de los astros, se miden sobre círculos máximos de la esfera celeste.

Ahora bien, para fijar la posición de un punto sobre la esfera celeste es necesario definir círculos de referencia. Basta para ello elegir un círculo máximo fundamental, determinado por un plano fundamental que pase por el centro de la esfera. A partir de este círculo se establece la perpendicular a dicho plano que pasa por el centro, y que corta a la esfera celeste en dos puntos, denominados polos del círculo máximo, y en otros círculos máximos, denominados secundarios, que pasan por los polos del círculo máximo fundamental y que son, por tanto, perpendiculares a él.

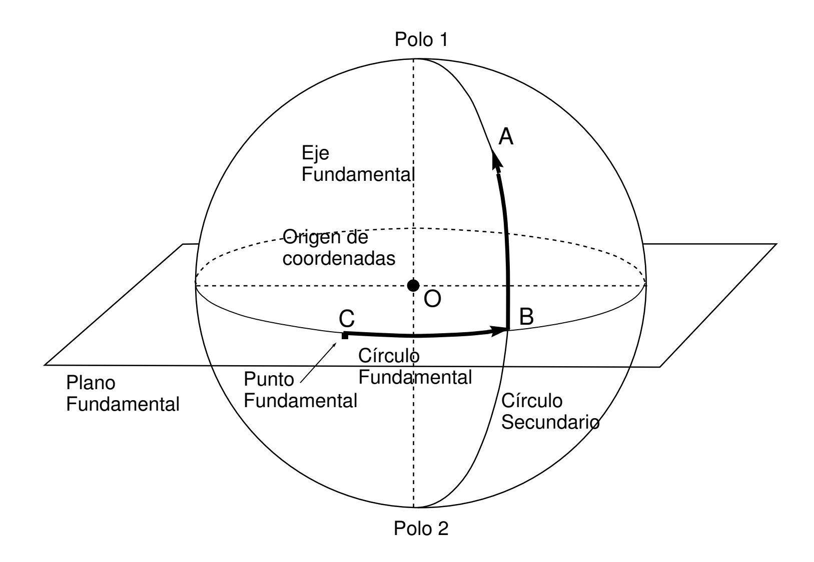


Figura 5.6: Coordenadas polares o esféricas de un punto situado sobre la esfera celeste

La posición de un punto A distinto de los polos sobre la esfera celeste viene dada por las coordenadas polares o esféricas siguientes: la distancia angular AB de A al círculo fundamental medida a lo largo del círculo secundario que pasa por A, y la distancia angular BC entre el punto intersección B del círculo secundario y el círculo fundamental y un punto arbitrario C que pertenece al círculo fundamental. También será necesario elegir un sentido de medida de ambas magnitudes angulares. En el caso de que el punto sobre la esfera celeste sea polo del círculo máximo fundamental bastará con la primera de ellas.

De este modo, concluimos que:

Definición 5.8 *Un sistema de coordenadas celestes queda definido por:*

i) *Un punto arbitrario que se toma como centro de la esfera celeste y se de-*

nomina origen de coordenadas.

ii) *Un plano fundamental que pasa por el centro de la esfera celeste y cuya interesección con la misma determina el círculo máximo fundamental. El eje fundamental, o perpendicular a este círculo que pasa por el origen, determina los polos de la misma, que a su vez posibilitan la definición de los círculos máximos secundarios.*

iii) *Un punto arbitrario del círculo máximo fundamental y que se denomina punto fundamental del sistema.*

iv) *Un sentido de medida de ángulos. Si el sentido elegido coincide con el movimiento de las agujas del reloj se denomina retrógrado y en caso contrario se denomina directo.*

En principio, eligiendo convenientemente el origen del sistema y el plano fundamental tendremos diferentes sistemas de coordenadas celestes. El origen puede ser seleccionado entre el lugar de observación sobre la superficie de la Tierra, el centro de masas de la Tierra o el centro de masas del sistema solar, obteniéndose, respectivamente, coordenadas topocéntricas, geocéntricas o heliocéntricas. El plano fundamental puede ser el plano del horizonte terrestre, el plano que contiene al ecuador terrestre, el plano que contiene la órbita "aparente" del Sol, o el plano de simetría de la Galaxia, obteniéndose respectivamente, coordenadas horizontales, ecuatoriales, eclípticas o galácticas. Obviamente, no tendrán ningún sentido ni utilidad considerar ciertas combinaciones, por ejemplo, coordenadas topocéntricas eclípticas, o geocéntricas horizontales.

En cualquier caso, el objeto de la Astronomía de Posición consiste en la determinación mediante coordenadas esféricas de las direcciones en que se ven los astros en un instante determinado.

5.2.1. Sistema altacimutal

Definición 5.9 *El sistema altacimutal o sistema de coordenadas horizontales es un sistema de coordenadas topocéntrico horizontal que se define por:*

i) *El origen de coordenadas es el lugar de observación situado sobre la superficie terrestre.*

ii) *El plano fundamental es el horizonte del lugar. Por tanto, el círculo máximo fundamental, el eje fundamental, los polos y los círculos secundarios son, respectivamente, el horizonte celeste, la vertical astronómica del lugar, el cénit y el nadir y los verticales celestes.*

iii) *El punto fundamental es el punto sur celeste.*

iv) *Los ángulos o arcos correspondientes sobre el horizonte celeste se miden en sentido retrógrado a partir del punto sur celeste.*

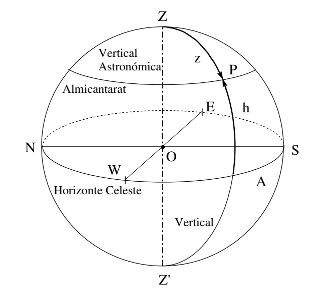


Figura 5.7: Coordenadas horizontales de un punto sobre la esfera celeste

Por un punto de la esfera celeste, distinto del cénit y el nadir, pasarán un único vertical y un único almicantarat. Si el punto coincide con el cénit o con el nadir

del lugar entonces el almicantarat es el propio punto y pasarán por él infinitos verticales.

Definición 5.10 *En este sistema de coordenadas horizontales un punto de la esfera celeste queda fijado por las siguientes coordenadas esféricas:*

Acimut (A) ... Arco del horizonte celeste medido en sentido retrógrado, de 0º a 360º, desde el punto sur hasta el vertical que pasa por el punto.

Altura (h) ... Arco del vertical que pasa por el punto, medido desde el horizonte celeste hasta dicho punto. Si éste pertenece al hemisferio visible, la altura toma un valor entre 0º y +90º, y entre -90º y 0º si pertenece al hemisferio invisible. Usualmente, la altura se sustituye por:

Distancia cenital (z) ... Arco del vertical que pasa por el punto, medido de 0º y 180º desde el cénit hasta el punto.

Las coordenadas horizontales de un punto sobre la esfera celeste serán por tanto el acimut y la altura (A, h), o bien el acimut y la distancia cenital (A, z). Resulta trivial comprobar que la altura y la distancia cenital cumplen que $h = 90 - z$.

Veamos a continuación el valor de estas coordenadas en algunos casos particulares:

- El acimut de un punto situado sobre el primer vertical oeste es 90º y sobre el primer vertical este vale 270º.
- Para un punto que esté situado sobre el meridiano superior de un lugar del hemisferio norte terrestre, el acimut valdrá 0º si está situado entre el cénit y el polo sur celeste y 180º si lo está entre el cénit y el polo norte celeste.
- Para un punto que esté situado en el meridiano inferior de un lugar del hemisferio sur terrestre, el acimut vale 0º si está situado entre el polo sur celeste y el nadir y 180º si lo está entre el nadir y el polo norte celeste.
- La altura del cénit es 90º, la del nadir -90º, y la de cualquier punto del horizonte celeste 0º.
- La altura del polo norte celeste coincide con la latitud del lugar.

Este sistema de coordenadas tiene la ventaja de representar geométricamente el aspecto del cielo visto por un observador situado en un lugar determinado de la superficie terrestre. Es, además, accesible a la experimentación física puesto que tanto la vertical del lugar como el plano horizontal son fácilmente materializables mediante la dirección de la línea de la plomada y nivelación con burbuja. La meridiana o dirección norte–sur tampoco presenta dificultades pues cuando un astro atraviesa el meridiano superior del lugar tendrá altura máxima.

Los inconvenientes del sistema de coordenadas horizontales proceden del carácter local del mismo. Así, un punto de la esfera celeste en un determinado instante tendrá coordenadas horizontales diferentes para dos observadores situados en distintos puntos de la Tierra, pues los horizontes celestes respectivos son distintos. Esta dependencia de las coordenadas horizontales del lugar de observación hace

que constituya un sistema de referencia celeste local.

5.2.2. Sistema ecuatorial horario

Definición 5.11 *El sistema ecuatorial horario o sistema de coordenadas ecuatoriales horarias es un sistema de coordenadas geocéntrico ecuatorial que se define por:*

i) *El origen de coordenadas es el centro de masas de la Tierra.*

ii) *El plano fundamental es el plano que contiene al ecuador terrestre. Por tanto, el círculo máximo fundamental, el eje fundamental, los polos y los círculos secundarios son, respectivamente, el ecuador celeste, el eje celeste, los polos norte y sur celeste y los meridianos celestes.*

iii) *El punto fundamental es el punto Q'.*

iv) *Los ángulos o arcos correspondientes sobre el ecuador celeste se miden en sentido retrógrado a partir del punto Q'.*

Por un punto de la esfera celeste, distinto de los polos norte y sur celeste pasarán un único meridiano celeste y un único paralelo celeste. Si el punto coincide con alguno de los polos celestes entonces el paralelo es el propio punto y por él pasarán infinitos meridianos celestes.

Definición 5.12 *En este sistema de coordenadas ecuatoriales horarias, o simplemente coordenadas horarias, un punto de la esfera celeste queda fijado por las siguientes coordenadas esféricas:*

Ángulo horario (H) ... Arco del ecuador celeste medido en sentido retrógrado, de 0º a 360º, ó de 0^h a 24^h, desde el punto Q' hasta el meridiano celeste que pasa por el punto.

Declinación (δ) ... Arco del meridiano celeste que pasa por el punto medido desde el ecuador celeste hasta el punto. La declinación de un punto perteneciente al hemisferio norte toma un valor entre 0º y +90º, y entre -90º y 0º si pertenece al hemisferio sur. Usualmente, la declinación se sustituye por:

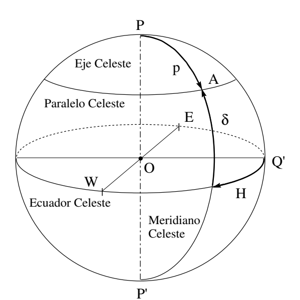
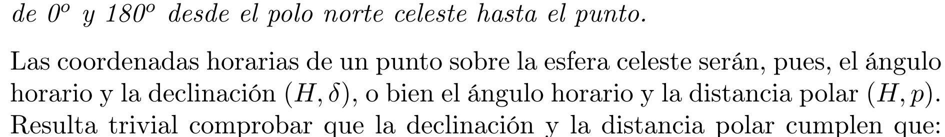


Figura 5.8: Coordenadas horarias de un punto sobre la esfera celeste

Distancia polar (p) ... Arco del meridiano celeste que pasa por el punto medido de 0º y 180º desde el polo norte celeste hasta el punto.



Las coordenadas horarias de un punto sobre la esfera celeste serán, pues, el ángulo horario y la declinación (H, δ), o bien el ángulo horario y la distancia polar (H, p). Resulta trivial comprobar que la declinación y la distancia polar cumplen que: $\delta = 90 - p$.

Este sistema de coordenadas presenta los inconvenientes siguientes:

- La determinación precisa del eje celeste, y consecuentemente del ecuador celeste, sólo se puede realizar en observatorios astronómicos que dispongan de telescopios fijos y relojes de precisión.
- Dado que el punto Q' pertenece al meridiano superior del lugar de obser-

vación, el ángulo horario tendrá un carácter local.

La observación desde un lugar de la superficie de la Tierra muestra que los puntos de la esfera celeste describen arcos paralelos al ecuador terrestre en sentido retrógrado.

Desde la antigüedad este movimiento se intentó explicar mediante las dos hipótesis distintas siguientes: mediante la rotación de la Tierra alrededor de un eje; o bien mediante la rotación de la esfera celeste alrededor de la Tierra.

Si bien es cierto que algunos astrónomos, como por ejemplo el pitagórico Heráclito, defendieron la primera de las hipótesis, se aceptó el concepto aristotélico de que la Tierra era un cuerpo inmóvil del espacio y que todos los demás cuerpos giraban entorno a ella. Newton postuló, basándose en los principios de la dinámica, que las aceleraciones -centrípeta y de Coriolis- observadas sobre la superficie terrestre, demostraban que la rotación real de la Tierra era la única hipótesis compatible con las leyes dinámicas. Pero no fue hasta 1851 cuando Foucault, con el péndulo por él construido, experimentó físicamente la rotación real de la Tierra.

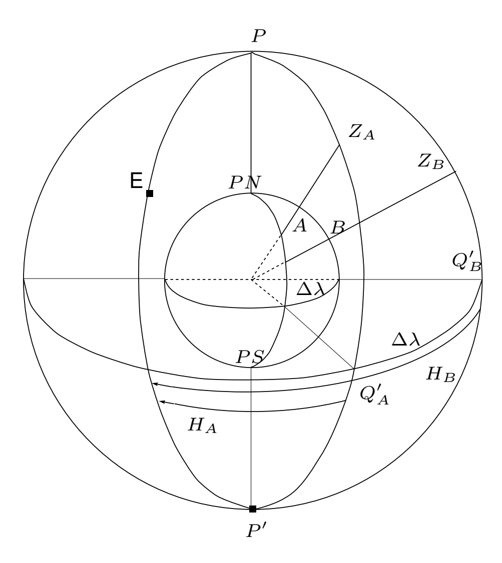


Figura 5.9: Relación entre los ángulos horarios en dos lugares distintos de un mismo punto

Este fenómeno aparente se debe al movimiento de rotación de la Tierra alrededor del eje terrestre, con período diurno y en sentido directo. Considerando que este movimiento de rotación es uniforme este sistema de coordenadas presenta las ventajas siguientes:

- En una primera aproximación podemos suponer que la declinación δ de cualquier estrella permanece constante a lo largo del tiempo y para cualquier lugar de la Tierra. La declinación de los astros del Sistema Solar es constante

para cada día.

- El ángulo horario es independiente de la latitud del lugar de observación.
- La variación uniforme del ángulo horario permite determinar, para un mismo lugar, el valor de esta coordenada para dos instantes de tiempo diferentes. En efecto, supuesto conocido el ángulo horario H_{t_1} en un instante t_1, para un instante t_2 se tiene que $H_{t_2} = H_{t_1} + t_2 - t_1$, donde $t_2 - t_1$ es el intervalo de tiempo transcurrido.
- El valor absoluto de la diferencia entre los ángulos horarios de un astro en dos lugares distintos y en un mismo instante es igual a la diferencia en longitud entre ambos lugares, o sea $|H_B - H_A| = \Delta\lambda$.

5.2.3. Movimiento orbital de la Tierra

La Tierra es un planeta del Sistema Solar en movimiento relativo respecto del Sol. En Astronomía de Posición se considera que el Sistema Solar es un sistema físico aislado en el espacio cuya estructura dinámica depende sólo de las fuerzas interiores al sistema. En este sentido, el sistema planetario formado exclusivamente por el Sol, los planetas mayores y sus satélites resulta idóneo para estudiar las leyes dinámicas del movimiento.

La Tierra, como cualquier otro planeta del sistema solar, está sometida con respecto al Sol a las leyes cinemáticas de Kepler[6] y a la ley de la gravitación universal de Newton,[7] debido a las cuales describe una órbita elíptica alrededor del Sol en sentido directo, con el Sol en uno de sus focos y de período anual.

El eje mayor de esta elipse se denomina *línea de los ábsides*, siendo sus extremos el *perihelio*, o punto más cercano al Sol, y el *afelio*, o punto más alejado. Las distancias máxima y mínima de la Tierra al Sol valen, respectivamente, $152_1100.000$ y $147_1100.000$ Kms., el semieje mayor $149_1600.000$ Kms. y la excentricidad de su

[6] Las leyes cinemáticas del movimiento planetario fueron formuladas por Johannes Kepler (1571-1630) a partir de las observaciones de las posiciones de los planetas efectuadas por Tycho Brahe (1546-1601). Las leyes de Kepler que rigen el movimiento cinemático de los planetas respecto al Sol en son las siguientes:

1. La órbita de cada planeta es una elipse con el Sol en uno de sus focos.(1609)
2. El radio vector que une el Sol con el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales. (*Ley de las áreas*, 1609)
3. Los cubos de los semiejes mayores de las órbitas planetarias son proporcionales a los cuadrados de los periodos de revolución.(1619)

[7] Aunque la descripción del movimiento planetario dada por las leyes de Kepler es puramente geométrica y prescinde de las fuerzas o causas que lo producen, el mismo Kepler sospechaba la existencia de una fuerza atractiva procedente del Sol que mantiene a los planetas en sus órbitas. En 1687 Newton formula matemáticamente la ley de esa fuerza, deduciéndola de las leyes de Kepler y de las leyes dinámicas de la caída de los cuerpos. Esta ley, denominada ley de gravitación universal, expresa que la fuerza ejercida entre dos partículas es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia existente entre ellas.

órbita 0.017.

Para un observador terrestre el vector de posición del Sol describe una elipse aparente alrededor de la Tierra en sentido directo, con la Tierra en uno de sus focos y con el mismo período anual. Bajo este punto de vista, los puntos más próximo y más alejado entre el Sol y la Tierra se denominan *perigeo* y *apogeo*, respectivamente.

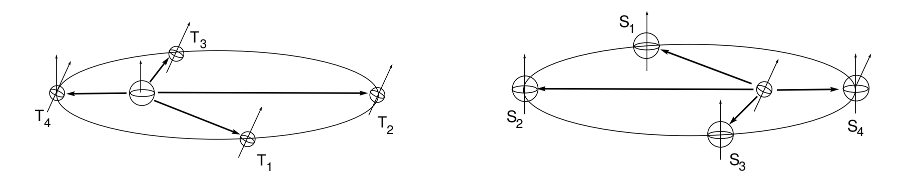


Figura 5.10: Órbitas real terrestre y solar aparente

El plano que contiene a esta elipse orbital, real o aparente, se denomina plano de la eclíptica. El eje de rotación de la Tierra no es perpendicular a este plano, que estará inclinado respecto al ecuador. Esta inclinación hace que los rayos solares incidan con diferentes ángulos dependiendo de la fecha del año y de la latitud del punto sobre la superficie de la Tierra, originándose las estaciones del año.

Definición 5.13 *Considerando el movimiento orbital aparente del Sol alrededor de la Tierra podemos realizar las siguientes definiciones sobre la esfera celeste de centro el centro de masas de la Tierra:*

Eclíptica ... *Círculo máximo de la esfera celeste que resulta de su intersección con el plano de la eclíptica.*

Eje de la eclíptica ... *Perpendicular al plano de la eclíptica que pasa por el centro de la esfera celeste.*

Polos de la eclíptica (π, π') ... *Puntos intersección del eje de la eclíptica con la esfera celeste. El polo norte de la eclíptica* π *es el más próximo al polo norte celeste y el polo sur de la eclíptica* π' *es el más próximo al polo sur celeste.*

Oblicuidad de la eclíptica (ε) ... *Ángulo que forman la eclíptica y el ecuador celeste, o ángulo existente entre el eje celeste y el eje de la eclíptica. Si consideramos el meridiano que pasa por el polo norte de la eclíptica podemos definir la oblicuidad de la eclíptica como el arco de dicho meridiano entre los polos norte celeste y eclíptico, o también como la distancia polar del polo norte de la eclíptica. Su valor aproximado es* $\varepsilon = 23^o\, 27'$.

Línea de los equinoccios ... *Diámetro determinado por la intersección de la eclíptica y el ecuador celeste.*

Equinoccios ... *Puntos de la esfera celeste que son extremos de la línea de los equinoccios, y por tanto, diametralmente opuestos.*

Se denomina punto Aries, punto vernal o equinoccio de primavera *al equinoccio*

en el que el Sol pasa del hemisferio sur celeste al hemisferio norte celeste. En este punto la declinación del Sol es nula pero en instantes anteriores es negativa e instantes posteriores es positiva.

Se denomina punto Libra, punto autumnal o equinoccio de otoño *al otro extremo de la línea de los equinoccios, en el que el Sol pasa del hemisferio norte celeste al hemisferio sur celeste. Al igual que en el punto Aries, su declinación nula pero pasa de declinaciones positivas a negativas.*

Línea de los solsticios ... *Diámetro de la eclíptica perpendicular a la línea de los equinoccios.*

Solsticios ... *Puntos de la esfera celeste extremos de la línea de los solsticios. También serán puntos diametralmente opuestos.*

Se denomina punto Cáncer o solsticio de verano *el solsticio situado en el hemisferio norte celeste. En este punto la declinación del Sol y la oblicuidad de la eclíptica son iguales, y consecuentemente máximas.*

Se denomina punto Capricornio o solsticio de invierno *al solsticio situado en el hemisferio sur celeste. La declinación del Sol es mínima y opuesta a lo oblicuidad de la eclíptica.*

Máximos de longitud ... *Círculos máximos que pasan por los polos de la eclíptica.*

Paralelos de latitud ... *Círculos menores paralelos a la eclíptica.*

Primer máximo de longitud ... *Máximo de longitud que pasa por los equinoccios.*

Coluros de los equinoccios y de los solsticios ... *Meridianos celestes que pasan por los equinoccios y por los solsticios, respectivamente.*

Banda zodiacal ... *Zona de la esfera celeste de 17º de amplitud limitada por dos paralelos de latitud simétricos respecto de la eclíptica.*

Trópicos de Cáncer y Capricornio ... *Paralelos terrestres de latitud $+\varepsilon$ y $-\varepsilon$, respectivamente.*

Círculos polar ártico y antártico ... *Paralelos terrestres de colatitud $+\varepsilon$ y $180^o - \varepsilon$, respectivamente.*

Como ya se ha mencionado, a lo largo del año el Sol recorre la eclíptica en su movimiento aparente alrededor de la Tierra, estando el día 21 de marzo en el punto Aries, el 21 de septiembre en el punto Libra, el 21 de junio en el punto Cáncer y el 21 de diciembre en el punto Capricornio.

La declinación del Sol varía entre $+\varepsilon$ y $-\varepsilon$, alcanzando estos valores máximo y mínimo en Cáncer y Capricornio, respectivamente. En los punto Aries y Libra vale 0º. La declinación es positiva entre el 21 de marzo y el 21 de septiembre y negativa entre el 21 de septiembre y el 21 de marzo, es creciente entre el 21 de diciembre y el 21 de junio y decreciente entre el 21 de junio y el 21 de diciembre.

Sobre la banda zodiacal se observan los planetas del Sistema Solar y las constela-

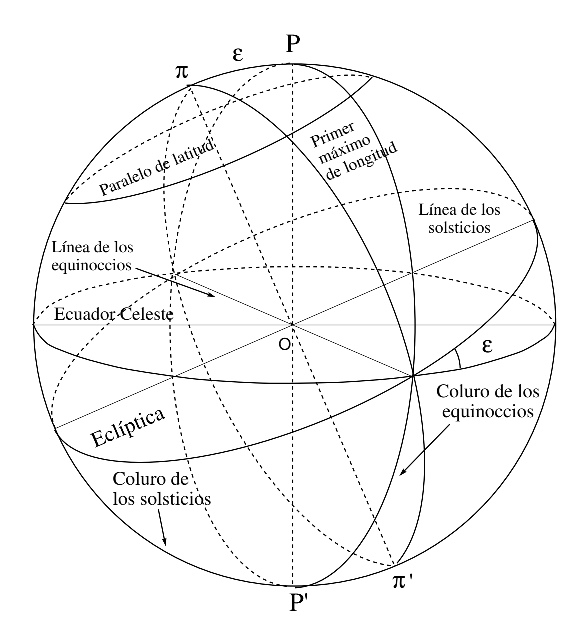


Figura 5.11: Elementos de la esfera celeste (II)

ciones zodiacales. Esta banda se divide en 12 regiones de 30º de amplitud medidos sobre la eclíptica en sentido directo a partir del punto Aries, correspondiendo cada región a un signo del zodiaco o constelación zodiacal. Partiendo del punto Aries, y recorriendo el zodiaco en sentido directo dichos signos son:

Aries	♈	Tauro	♉	Géminis	♊
Cáncer	♋	Leo	♌	Virgo	♍
Libra	♎	Escorpión	♏	Sagitario	♐
Capricornio	♑	Acuario	♒	Piscis	♓

5.2.4. Sistema ecuatorial absoluto

Como se explicó anteriormente, las coordenadas horizontales varían según el lugar de observación y en función del tiempo, y a pesar de que el ángulo horario presenta ciertas ventajas sobre el acimut, sigue dependiendo del tiempo y del lugar de observación. Sin embargo, la declinación de un astro es constante para cualquier lugar de la Tierra y en cualquier instante. Por tanto, para la construcción definitiva de un sistema de coordenadas que sean invariantes respecto del espacio y del tiempo ya disponemos de una coordenada que lo es.

Definición 5.14 *El sistema ecuatorial absoluto o sistema de coordenadas ecuatoriales absolutas es un sistema de coordenadas geocéntrico ecuatorial en donde el origen del sistema y el plano fundamental son los mismos que se definieron en el sistema ecuatorial horario, pero ahora el punto fundamental es el punto Aries y los ángulos o arcos correspondientes sobre el ecuador celeste se miden en sentido directo a partir del punto Aries.*

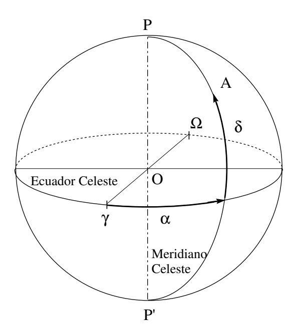


Figura 5.12: Coordenadas absolutas de un punto sobre la esfera celeste

Definición 5.15 *Las coordenadas ecuatoriales absolutas de un punto de la esfera celeste son la* ascensión recta *(α), que es el arco del ecuador celeste medido en sentido directo de 0^h a 24^h desde el punto Aries hasta el meridiano celeste que pasa por el punto y la* declinación *definida anteriormente en el sistema ecuatorial horario.*

Puesto que el punto Aries es un punto fijo de la esfera celeste está sometido al mismo movimiento aparente, debido a la rotación terrestre, que cualquier otro punto de ésta. Luego la ascensión recta es una coordenada constante.

Definición 5.16 *Se llama hora sidérea o tiempo sidéreo (θ) de un lugar determinado al ángulo horario en ese lugar del punto Aries.*

Aunque la siguiente definición se anticipa a los contenidos del texto será muy útil para visualizar el concepto de hora sidérea local.

Definición 5.17 *Se llama día sidéreo al intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del punto Aries por el meridiano superior del lugar.*

Así, serán las 0^h de tiempo sidéreo cuando el punto Aries está situado en el meridiano superior del lugar y en este caso el ángulo horario del punto Aries es 0°.

Relación fundamental de la Astronomía de Posición *En cada instante la hora sidérea local es la suma del ángulo horario y la ascensión recta de cualquier astro, esto es, $\theta = H + \alpha$.*

5.2.5. Sistema eclíptico

A pesar de que el sistema de coordenadas absolutas proporciona coordenadas constantes de un astro, cuando se pretende estudiar movimientos de los planetas o descripciones del sistema solar se define el sistema de coordenadas eclípticas.

Definición 5.18 *El sistema eclíptico o sistema de coordenadas eclípticas es un sistema de coordenadas geocéntrico eclíptico que se define por:*

i) *El origen de coordenadas es el centro de masas de la Tierra.*

ii) *El plano fundamental es el plano de la eclíptica. Por tanto, el círculo máximo fundamental, el eje fundamental, los polos y los círculos secundarios son, respectivamente, la eclíptica, el eje de la eclíptica, los polos norte y sur eclípticos y los máximos de longitud.*

iii) *El punto fundamental es el punto Aries.*

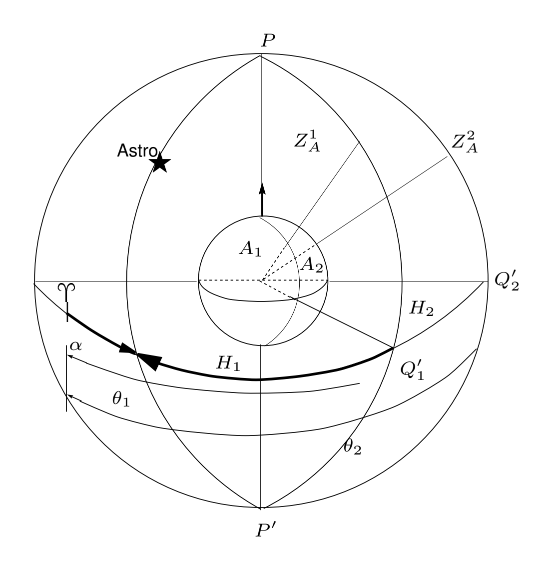


Figura 5.13: Ángulo horario, ascensión recta y hora sidérea

iv) *Los ángulos o arcos correspondientes sobre la eclíptica se miden en sentido directo a partir del punto Aries.*

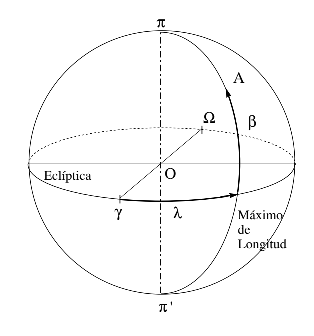


Figura 5.14: Coordenadas eclípticas de un punto sobre la esfera celeste

Por un punto de la esfera celeste, distinto de los polos norte y sur eclípticos pasarán un único máximo de longitud y un único paralelo de latitud. Si el punto coincide con alguno de los polos eclípticos entonces el paralelo es el propio punto y por él pasarán infinitos máximos de longitud.

Definición 5.19 *En este sistema de coordenadas eclípticas un punto de la esfera celeste queda fijado por las siguientes coordenadas esféricas:*

Longitud eclíptica (λ) ... Arco de la eclíptica medido en sentido directo de 0º y 360º desde el punto Aries hasta el máximo de longitud que pasa por el punto.

Latitud eclíptica (β) ... Arco del máximo de longitud que pasa por el punto medido desde la eclíptica hasta el punto. La latitud eclíptica de un punto varía entre -90º y +90º, tomándose positivo hacia el polo norte eclíptico y negativo hacia el polo sur eclíptico.

5.2.6. Sistema galáctico

El estudio de la estructura de la Galaxia ha conducido a la definición de un nuevo sistema de coordenadas celestes. Previamente, definamos ciertos elementos sobre la esfera celeste que están relacionados con este sistema.

Definición 5.20 *Plano galáctico ... Plano de simetría de la Galaxia.*

Eje galáctico ... Perpendicular al plano galáctico que pasa por el centro de la esfera celeste.

Ecuador galáctico ... Círculo máximo de la esfera celeste que resulta de la intersección del plano galáctico con dicha esfera.

Polos galácticos (G, G') ... Puntos de la esfera celeste que resultan de la intersección del eje galáctico con la esfera celeste. El polo norte galáctico es el que está más próximo al polo norte celeste y el polo sur galáctico el más próximo al polo sur celeste. Las coordenadas absolutas del polo norte galáctico son $(\alpha_G, \delta_G) = (12^h 49^m, +27^o 24'0)$. *Meridianos galácticos ... Círculos máximos de la esfera celeste que pasan por los polos galácticos.*

Paralelos galácticos ... Círculos menores de la esfera celeste paralelos al ecuador galáctico.

Centro galáctico celeste (C) ... Punto de la esfera celeste que resulta de la intersección del ecuador galáctico con la dirección del centro galáctico, o centro de masas de la Galaxia. Para situar este punto se considera el meridiano galáctico que forma un ángulo de 123º con el meridiano galáctico que pasa por el polo norte celeste medido, a partir de este último meridiano galáctico, sobre el ecuador galáctico en sentido retrógrado.

Definición 5.21 *El sistema galáctico o sistema de coordenadas galácticas es un sistema de coordenadas geocéntrico galáctico que se define por:*

i) *El origen de coordenadas es el centro de masas de la Tierra.*

ii) *El plano fundamental es el plano galáctico. Por tanto, el círculo máximo fundamental, el eje fundamental, los polos y los círculos secundarios son, respectivamente, el ecuador galáctico, el eje galáctico, los polos galácticos y los meridianos galácticos.*

iii) *El punto fundamental es el centro galáctico celeste.*

iv) *Los ángulos o arcos correspondientes sobre el ecuador galáctico se miden en sentido directo a partir del punto C.*

Por un punto de la esfera celeste, distinto de los polos norte y sur galácticos pasarán un único meridiano galáctico y un único paralelo galáctico. Si el punto coincide con alguno de los polos galácticos entonces el paralelo galáctico es el propio punto y por él pasarán infinitos meridianos galácticos.

Definición 5.22 *En este sistema de coordenadas galácticas un punto de la esfera celeste queda fijado por las siguientes coordenadas esféricas:*

Longitud galáctica (l) ... Arco del ecuador galáctico medido en sentido directo de 0º y 360º desde el centro galáctico celeste hasta el meridiano galáctico que pasa por el punto.

Latitud galáctica (b) ... Arco del meridiano galáctico que pasa por el punto medi-

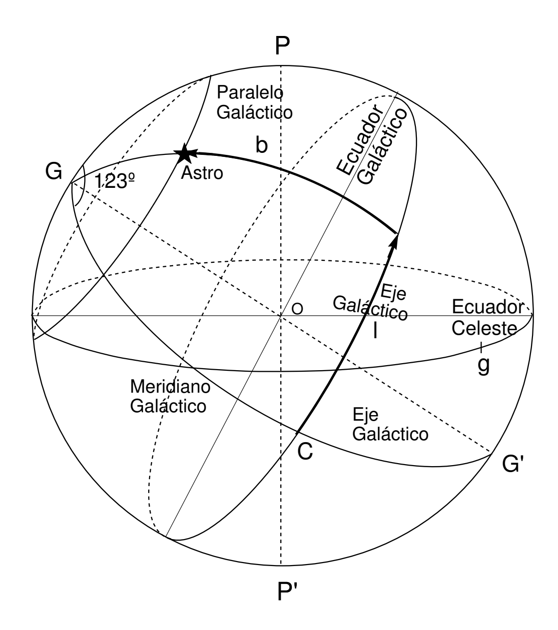


Figura 5.15: Coordenadas galácticas de un punto sobre la esfera celeste

do desde el ecuador galáctico hasta el punto. La latitud galáctica se mide a partir del ecuador galáctico de 0º a 90º, positivamente hace el polo norte galáctico, y negativamente hacia el polo sur galáctico.

5.2.7. Transformaciones entre los diferentes sistemas de coordenadas

Un problema habitual en Astronomía de Posición es obtener las coordenadas de un punto sobre la esfera celeste a partir de las coordenadas del punto dadas con respecto a otro sistema. Una de las motivaciones principales de este hecho procede de la fase experimental de la Astronomía, bien para obtener las coordenadas locales de un astro que se desea observar a partir de las coordenadas absolutas procedentes de un catálogo estelar, o recíprocamente, obtener las coordenadas absolutas de fenómenos astronómicos observados respecto a un determinado sistema de coordenadas local.

Para efectuar las transformaciones de coordenadas utilizaremos los conceptos desarrollados y las expresiones obtenidas en Trigonometría Esférica.

Debido a la gran cantidad de situaciones posibles de un astro sobre la esfera celeste no será posible establecer fórmulas trigonométricas que resuelvan de forma general los problemas de transformación de coordenadas. Por esto es muy conveniente que el lector trate de plantearse diferentes situaciones que ayuden a la comprensión de los métodos que se explican a continuación.

Transformación entre coordenadas horizontales, ecuatoriales horarias y ecuatoriales absolutas

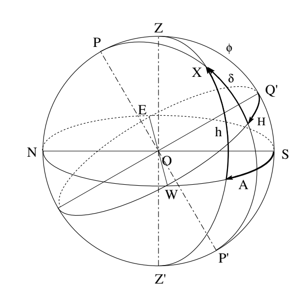


Figura 5.16: Coordenadas horizontales y horarias

Consideremos un astro X de coordenadas horizontales (A, h) y de coordenadas ecuatoriales horarias (H, δ) y un lugar de la Tierra de latitud ϕ. Sobre la esfera celeste se forma un triángulo esférico, denominado *triángulo de posición o astronómico*, cuyos vértices son el polo norte celeste (P), el cénit astronómico (Z) y el propio astro (X).

El ángulo de vértice P y determinado por el meridiano del lugar y el meridiano celeste que pasa por el astro depende del ángulo horario H, y del acimut A depende el ángulo de vértice Z y determinado por el vertical que pasa por el polo norte celeste y el vertical que pasa por el astro. Los valores de estos ángulos dependerán del lugar que ocupe el astro y de la latitud del lugar.

El ángulo cuyo vértice es el astro y que está determinado por el meridiano celeste y el vertical que pasa por el astro se denomina *ángulo paraláctico (q)*.

El lado PX es el arco del meridiano celeste entre el polo norte celeste y el astro, el lado ZX es el arco del vertical entre el cénit y el astro y el lado PZ es el arco del meridiano del lugar entre el polo norte celeste y el cénit, siendo sus valores respectivos $90^{\circ} - \delta$, $90^{\circ} - h$ y $90^{\circ} - \phi$, o equivalentemente, la distancia polar, la distancia cenital y la colatitud.

Proposición 5.2 *Sea ϕ la latitud de un lugar en el hemisferio norte ($\phi > 0$) y sea X un astro situado en el hemisferio norte, occidental y visible, de coordenadas horizontales (A, h) y coordenadas ecuatoriales horarias (H, δ). Entonces las coordenadas horarias y el ángulo paraláctico en función de las coordenadas horizontales y la latitud del lugar vienen dadas por:*

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\delta \;=\; \operatorname{sen}\phi\,\operatorname{sen}h \,-\, \cos\phi\,\cos h\,\cos A, \\ \tan H \;=\; \dfrac{\cos h\,\operatorname{sen}A}{\operatorname{sen}h\,\cos\phi \,+\, \cos h\,\operatorname{sen}\phi\,\cos A}, \\ \tan q \;=\; \dfrac{\cos\phi\,\operatorname{sen}A}{\cos h\,\operatorname{sen}\phi \,+\, \operatorname{sen}h\,\cos\phi\,\cos A}. \end{cases}$$

Recíprocamente, las coordenadas horizontales y el ángulo paraláctico en función de las coordenadas horarias y la latitud se obtienen mediante las expresiones:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}h \;=\; \operatorname{sen}\phi\,\operatorname{sen}\delta \,+\, \cos\phi\,\cos\delta\,\cos H, \\ \tan A \;=\; \dfrac{\cos\delta\,\operatorname{sen}H}{-\,\cos\phi\,\operatorname{sen}\delta \,+\, \operatorname{sen}\phi\,\cos\delta\,\cos H}, \\ \tan q \;=\; \dfrac{\cos\phi\,\operatorname{sen}H}{\cos\delta\,\operatorname{sen}\phi \,-\, \operatorname{sen}\delta\,\cos\phi\,\cos H}. \end{cases}$$

Demostración. En esta situación los elementos del triángulo de posición son

$$\begin{array}{lll} ZX = 90^{\circ} - h, & PZ = 90^{\circ} - \phi, & PX = 90^{\circ} - \delta, \\ P = H, & Z = 180^{\circ} - A, & X = q. \end{array}$$

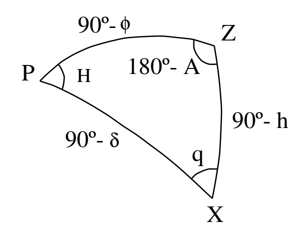


Figura 5.17

Para calcular las coordenadas horarias conocidas las coordenadas horizontales y la latitud aplicamos la 1^a, 2^a y 3ª fórmulas de Bessel para los elementos del triángulo de posición desconocidos, obteniéndose el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen}\delta \,=\, \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}h \,-\, \cos\phi \cos h \cos A, \\ \cos\delta \operatorname{sen}H \,=\, \cos h \operatorname{sen}A, \\ \cos\delta \cos H \,=\, \operatorname{sen}h \cos\phi \,+\, \cos h \operatorname{sen}\phi \cos A, \\ \cos\delta \operatorname{sen}q \,=\, \cos\phi \operatorname{sen}A, \\ \cos\delta \cos q \,=\, \cos h \operatorname{sen}\phi \,+\, \operatorname{sen}h \cos\phi \cos A. \end{array}\right.$$

La declinación se obtiene directamente de la primera ecuación del sistema, y el ángulo horario dividiendo la segunda por la tercera, obteniéndose

$$\tan H \,=\, \frac{\cos h \operatorname{sen}A}{\operatorname{sen}h \cos\phi \,+\, \cos h \operatorname{sen}\phi \cos A}.$$

Dividiendo la cuarta ecuación entre la quinta se obtiene la expresión que proporciona el ángulo paraláctico

$$\tan q \,=\, \frac{\cos\phi \operatorname{sen}A}{\cos h \operatorname{sen}\phi \,+\, \operatorname{sen}h \cos\phi \cos A}.$$

Análogamente, para calcular las coordenadas horizontales conocidas las coordenadas horarias y la latitud basta considerar el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen}h \,=\, \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\delta \,+\, \cos\phi \cos\delta \cos H, \\ \cos h \operatorname{sen}A \,=\, \cos\delta \operatorname{sen}H, \\ \cos h \cos A \,=\, -\, \cos\phi \operatorname{sen}\delta \,+\, \cos\phi \cos\delta \cos H, \\ \cos h \operatorname{sen}q \,=\, \cos\phi \operatorname{sen}H, \\ \cos h \cos q \,=\, \cos\delta \operatorname{sen}\phi \,-\, \operatorname{sen}\delta \cos\phi \cos H. \end{array}\right.$$

La ventaja de ambos métodos es que no se necesita calcular ningún elemento para la obtención de los restantes.

La ambigüedad que produce la obtención tanto del ángulo horario como del acimut por medio de un arcotangente se resuelve teniendo en cuenta que ambos han de pertenecer, a la vez, al intervalo $(0^o, 180^o)$ o a $(180^o, 360^o)$.

Puesto que la declinación es la misma para transformar coordenadas ecuatoriales horarias a ecuatoriales absolutas, o viceversa, bastará aplicar la relación fundamental de la Astronomía de Posición $\theta = H + \alpha$.

Cuando se deseen realizar transformaciones entre coordenadas horizontales y coordenadas absolutas habrá que efectuar necesariamente el cambio intermedio a coordenadas horarias.

Transformaciones entre coordenadas ecuatoriales absolutas y eclípticas

Sea X un astro de coordenadas absolutas (α, δ) y coordenadas eclípticas (λ, β). Su situación sobre la esfera celeste determina un triángulo esférico cuyos vértices son el polo norte celeste (P), el polo norte eclíptico (π) y el propio astro (X).

Los ángulos correspondientes a los vértices P y π dependen de la ascensión recta y de la longitud eclíptica, pues están determinados respectivamente por el coluro de los solsticos y el meridiano celeste y por el máximo de longitud que pasa por el polo norte celeste y el máximo de longitud que pasa por el astro.

Los valores de estos ángulos dependerán de la situación del astro sobre la esfera celeste. El ángulo cuyo vértice es el astro y que está determinado por el meridiano celeste y el máximo de longitud que pasa por el astro se denomina *ángulo en el astro (η)*.

El lado PX es el arco del meridiano celeste entre el polo norte celeste y el astro, el lado πX es el arco del máximo de longitud entre el polo norte eclíptico y el astro y el lado $P\pi$ es el arco del coluro de los solsticios entre los polos norte celeste y eclíptico, siendo sus valores respectivos $90^o - \delta$, $90^o - \beta$ y ε.

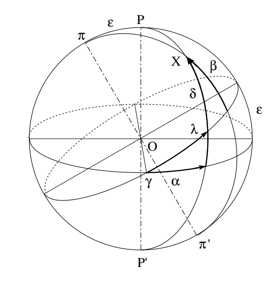


Figura 5.18: Coordenadas absolutas y eclípticas

Proposición 5.3 *Sea X un astro situado en el hemisferio norte celeste de coordenadas ecuatoriales absolutas (α, δ) y coordenadas eclípticas (λ,β). Si la latitud eclíptica es positiva y la ascensión recta es menor de 90º entonces las coordenadas eclípticas y el ángulo en el astro en función de las coordenadas absolutas vienen dadas por:*

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\operatorname{sen}\varepsilon\operatorname{sen}\alpha, \\ \tan\lambda = \dfrac{\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\varepsilon + \cos\delta\cos\varepsilon\operatorname{sen}\alpha}{\cos\delta\cos\alpha}, \\ \\ \tan\eta = \dfrac{\cos\alpha\operatorname{sen}\varepsilon}{\cos\delta\cos\varepsilon + \operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\varepsilon\operatorname{sen}\alpha}. \end{cases}$$

Recíprocamente, las coordenadas absolutas y el ángulo en el astro en función de las coordenadas eclípticas por:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}\beta\cos\varepsilon + \cos\beta\operatorname{sen}\varepsilon\operatorname{sen}\lambda, \\ \tan\alpha = \dfrac{-\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\varepsilon + \cos\beta\cos\varepsilon\operatorname{sen}\lambda}{\cos\beta\cos\lambda}, \\ \\ \tan\eta = \dfrac{\cos\lambda\operatorname{sen}\varepsilon}{\cos\beta\cos\varepsilon - \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\varepsilon\operatorname{sen}\lambda}. \end{cases}$$

siendo ε la oblicuidad de la eclíptica.

<u>Demostración</u>. En esta situación los elementos del triángulo de posición son

$$\begin{array}{lll} P\pi = \varepsilon, & PX = 90^o - \delta, & \pi X = 90^o - \beta, \\ P = 90^o + \alpha, & \pi = 90^o - \lambda, & X = \eta. \end{array}$$

Aplicando las fórmulas de Bessel al triángulo de posición se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\operatorname{sen}\varepsilon\operatorname{sen}\alpha, \\ \cos\beta\cos\lambda = \cos\delta\cos\alpha, \\ \cos\beta\operatorname{sen}\lambda = \operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\varepsilon + \cos\delta\cos\varepsilon\operatorname{sen}\alpha, \\ \cos\beta\operatorname{sen}\eta = \cos\alpha\operatorname{sen}\varepsilon, \\ \cos\beta\cos\eta = \cos\delta\cos\varepsilon + \operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\varepsilon\operatorname{sen}\alpha. \end{cases}$$

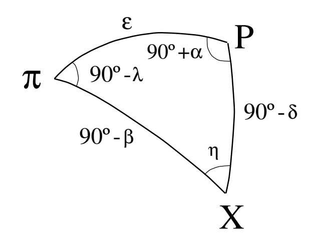


Figura 5.19

La latitud eclíptica se obtiene directamente de la primera ecuación del sistema, y la longitud eclíptica dividiendo la tercera entre la segunda, obteniéndose

$$\tan\lambda = \frac{\operatorname{sen}\delta\,\operatorname{sen}\varepsilon + \cos\delta\,\cos\varepsilon\,\operatorname{sen}\alpha}{\cos\delta\,\cos\alpha}.$$

Dividiendo la cuarta ecuación entre la quinta se obtiene la expresión que proporciona el ángulo en el astro

$$\tan\eta = \frac{\cos\alpha\,\operatorname{sen}\varepsilon}{\cos\delta\,\cos\varepsilon + \operatorname{sen}\delta\,\operatorname{sen}\varepsilon\,\operatorname{sen}\alpha}.$$

Recíprocamente, para calcular las coordenadas absolutas supuestas conocidas las coordenadas oblicuidad eclípticas, basta considerar las relaciones:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}\beta\,\cos\varepsilon + \cos\beta\,\operatorname{sen}\varepsilon\,\operatorname{sen}\lambda, \\ \cos\delta\,\cos\alpha = \cos\beta\,\cos\lambda, \\ \cos\delta\,\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}\beta\,\operatorname{sen}\varepsilon + \cos\beta\,\cos\varepsilon\,\operatorname{sen}\lambda, \\ \cos\delta\,\operatorname{sen}\eta = \cos\lambda\,\operatorname{sen}\varepsilon, \\ \cos\delta\,\cos\eta = \cos\beta\,\cos\varepsilon - \operatorname{sen}\beta\,\operatorname{sen}\varepsilon\,\operatorname{sen}\lambda. \end{cases}$$

Para resolver las ambigüedades que se pueden producir en el cálculo de la longitud eclíptica o de la ascensión recta, tendremos en cuenta la expresión

$$\cos\delta\,\cos\alpha = \cos\beta\,\cos\lambda,$$

de donde se deduce que como $\cos\delta$, $\cos\beta$ son siempre positivos, $cos\alpha$ y $\cos\lambda$ tendrán el mismo signo.

Por tanto, conociendo una de las coordenadas, λ o α, sabremos a qué dos cuadrantes puede pertenecer la otra, siendo el cuadrante definitivo el determinado por el signo de su tangente.

Por ejemplo, si $\alpha > 90^o$ entonces, y puesto que $sig(\cos\alpha) = sig(\cos\lambda)$, λ puede pertenecer al segundo o tercer cuadrante. Ahora bien, si $\tan\lambda > 0$ entonces λ pertenecerá al tercer cuadrante, y si $\tan\lambda < 0$ entonces será un ángulo del segundo cuadrante.

Transformaciones entre coordenadas absolutas y galácticas

Sea X un astro de coordenadas absolutas (α, δ) y coordenadas galácticas (l, b), y consideremos las coordenadas ecuatoriales absolutas del polo norte galáctico (α_G, δ_G). Su situación sobre la esfera celeste determina un triángulo esférico cuyos vértices son el polo norte celeste (P), el polo norte galáctico (G) y el propio astro (X).

Los ángulos correspondientes a los vértices P y G dependen de la ascensión recta y de la longitud galáctica, pues están determinados, el primero por el meridiano

celeste que contiene al polo norte galáctico y el meridiano celeste, y el segundo por los meridianos galácticos que pasan por el polo norte celeste y el astro.

El lado PX es el arco del meridiano celeste entre el polo norte celeste y el astro, el lado GX es el arco del meridiano galáctico entre el polo norte galáctico y el astro y el lado PG es el arco del meridiano celeste que pasa por G, siendo sus valores respectivos $90^o - \delta$, $90^o - b$ y $90^o - \delta_G$.

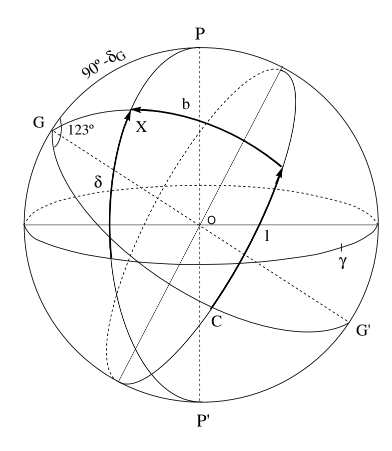


Figura 5.20: Coordenadas absolutas y galácticas

Proposición 5.4 *Sea X un astro situado en los hemisferios norte celeste y galáctico de coordenadas absolutas (α, δ) y coordenadas galácticas (l, b). Entonces las coordenadas galácticas en función de las coordenadas absolutas se obtienen mediante*

$$\begin{cases} \operatorname{sen} b = \operatorname{sen}\delta \, \operatorname{sen}\delta_G + \cos\delta \, \cos\delta_G \, \cos(\alpha - \alpha_G), \\ \tan(123^o - l) = \dfrac{\cos\delta \, \operatorname{sen}(\alpha - \alpha_G)}{\operatorname{sen}\delta \, \cos\delta_G - \cos\delta \, \operatorname{sen}\delta_G \, \cos(\alpha - \alpha_G)}. \end{cases}$$

Recíprocamente, las coordenadas absolutas en función de las coordenadas galácticas vienen dadas por

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}\delta_G \, \operatorname{sen} b + \cos\delta_G \, \cos b \, \cos(123^o - l), \\ \tan(\alpha - \alpha_G) = \dfrac{\cos b \, \operatorname{sen}(123^o - l)}{\operatorname{sen} b \, \cos\delta_G - \cos b \, \operatorname{sen}\delta_G \, \cos(123^o - l)}, \end{cases}$$

siendo (α_G, δ_G) las coordenadas absolutas del polo norte galáctico.

5.2.8. Coordenadas relativas

En ciertas situaciones resulta más conveniente referenciar la posición de dos puntos próximos uno respecto a otro en lugar de expresar dichos puntos por cualquiera

de sus coordenadas esféricas. Esto sucede, por ejemplo, cuando se trate de estrellas binarias, donde la estrella débil se referencia respecto a la componente principal del sistema binario, o en el caso de un planeta y sus satélites, en donde las posiciones de estos últimos se refieren al centro de masas del planeta.

En primer lugar definamos los siguientes elementos:

Definición 5.23 *Se llama* distancia angular *(s) entre dos puntos de la esfera celeste al arco del círculo máximo que los une y cuyos extremos son los propios puntos.*

Se llama ángulo de posición *(p) entre dos puntos de la esfera celeste al ángulo con vértice en uno de los puntos y comprendido entre su círculo de declinación y el círculo máximo que le une con el otro punto. Se mide de 0º a 360º desde la dirección del polo norte celeste en sentido retrógrado.*

Definición 5.24 *Dados dos puntos próximos A y B de la esfera celeste de coordenadas absolutas (α, δ) y (α', δ'), respectivamente, se llaman* coordenadas relativas *del punto B respecto al punto A a los valores*

$$\Delta\alpha = \alpha' - \alpha,\ \Delta\delta = \delta' - \delta.$$

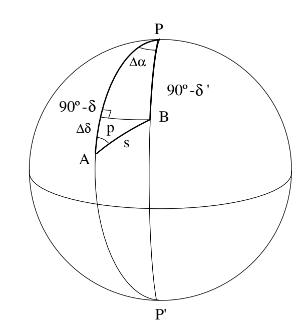
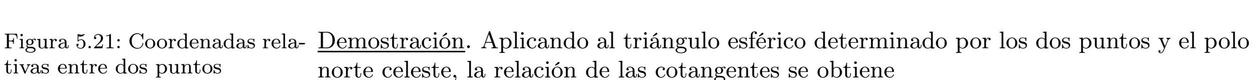


Figura 5.21: Coordenadas relativas entre dos puntos

Proposición 5.5 *Si A y B son dos puntos próximos sobre la esfera celeste de coordenadas absolutas (α, δ) y (α', δ') entonces las coordenadas relativas del punto B respecto al punto A vienen dadas por*

$$\begin{cases} \Delta\delta \;=\; s\,\cos p \; \Delta\alpha \;=\; \dfrac{s\ \mathrm{sen}\, p}{\cos(\delta + \Delta\delta)}. \end{cases}$$



Demostración. Aplicando al triángulo esférico determinado por los dos puntos y el polo norte celeste, la relación de las cotangentes se obtiene

$$\mathrm{sen}\, p \,\cot \Delta\alpha \;=\; \cot s \,\cos\delta \;-\; \mathrm{sen}\,\delta\,\cos p,$$

de donde

$$\tan\Delta\alpha \;=\; \frac{\mathrm{sen}\, s\ \mathrm{sen}\, p}{\cos s\,\cos\delta \;-\; \mathrm{sen}\, s\ \mathrm{sen}\,\delta\,\cos p}.$$

Esta expresión proporciona el valor de $\Delta\alpha$ en función de las coordenadas absolutas de A y de la distancia angular y el ángulo de posición del punto B respecto de A.

Aplicando la segunda fórmula de Bessel y las analogías de Bessel a dicho triángulo se obtienen, respectivamente,

$$\mathrm{sen}\, s\ \mathrm{sen}\, B \;=\; \cos\delta\ \mathrm{sen}\,\Delta\alpha, \quad \text{y} \quad \tan\frac{\Delta\delta}{2} \;=\; \frac{\mathrm{sen}\,\dfrac{p - B}{2}}{\mathrm{sen}\,\dfrac{p + (90^{o} - \delta)}{2}}\ \tan\frac{s}{2}.$$

De la primera de las ecuaciones anteriores se obtiene el valor del ángulo B, que sustituido en la segunda permite determinar la coordenada $\Delta\delta$ del punto B con respecto a A.

La distancia angular y el ángulo de posición del punto B respecto del punto A satisfacen las relaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos s \,=\, \operatorname{sen}\delta' \,\operatorname{sen}\delta \,+\, \cos\delta' \,\cos\delta \,\cos\Delta\alpha, \\ \operatorname{sen} s \,\operatorname{sen} p \,=\, \operatorname{sen}\Delta\alpha \,\cos\delta', \\ \operatorname{sen} s \,\cos p \,=\, \operatorname{sen}\delta' \,\cos\delta \,-\, \cos\delta' \,\operatorname{sen}\delta \,\cos\Delta\alpha. \end{array} \right.$$

Puesto que los puntos A y B están próximos la distancia angular será pequeña, por lo que el seno y la tangente de s, de $\Delta\alpha$ y de $\Delta\delta$ pueden aproximarse por dichas medidas angulares, y sus cosenos por la unidad. Con estas consideraciones las expresiones anteriores nos quedan

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \,\simeq\, \operatorname{sen}\delta' \,\operatorname{sen}\delta \,+\, \cos\delta' \,\cos\delta, \\ s \,\operatorname{sen} p \,\simeq\, \Delta\alpha \,\cos\delta', \\ s \,\cos p \,\simeq\, \operatorname{sen}\delta' \,\cos\delta \,-\, \cos\delta' \,\operatorname{sen}\delta. \end{array} \right.$$

La primera ecuación, queda $1 \,\simeq\, \cos\Delta\delta$, que obviamente con las aproximaciones indicadas, se cumple. La tercera ecuación quedaría

$$s \,\cos p \,\simeq\, \operatorname{sen}\delta' \,\cos\delta \,-\, \cos\delta' \,\operatorname{sen}\delta \,=\, \operatorname{sen}(\delta - \delta') \,=\, \Delta\delta,$$

y una vez calculado $\delta' = \delta + \Delta\delta$ tendremos que

$$\Delta\alpha \,=\, \frac{s \,\operatorname{sen} p}{\cos\delta'}.$$

Por último, hacer constar que aunque la distancia angular sea pequeña, en general el ángulo de posición no tiene por qué serlo.

5.3. Problemas

1. Un objeto celeste se mueve describiendo un círculo máximo sobre la esfera celeste. En un cierto instante se encuentra a 90° del Polo Norte Celeste y varios minutos después a $136^{o}19'$. Sabiendo que el ángulo formado por los meridianos celestes que pasan por estas posiciones es $62^{o}20'42"$, determinar la distancia en grados recorrida, así como los ángulos que forman estos meridianos con dicha trayectoria.

2. En una determinada época se observan simultáneamente desde dos lugares del mismo meridiano y latitudes $\phi = 30^{o}25'\,N$ y $\phi = 41^{o}23'\,S$, una estrella de acimutes $A_1 = 315^{o}23'$ y $A_2 = 337^{o}43'$, respectivamente. Obtener la declinación de la estrella y el ángulo paraláctico correspondiente al segundo lugar.

3. Siendo θ la hora sidérea de un lugar, probar que la distancia cenital del polo norte de la eclíptica viene dada por:

$$z = \arccos\left(\cos\epsilon \operatorname{sen}\phi - \operatorname{sen}\epsilon \cos\phi \operatorname{sen}\theta\right).$$

4. Se considera que un día de primavera cualquiera la ascensión recta y la declinación del Sol son (α, δ). Siendo ϵ la oblicuidad de la eclíptica, demostrar que:
$$\operatorname{sen}\alpha = \tan\delta \cot\epsilon.$$

5. Cierto día de primavera se obtienen las coordenadas horizontales del Sol en dos instantes cualesquiera. Demostrar que
$$\tan\phi = \frac{\operatorname{sen} z_1 \cos A_1 - \operatorname{sen} z_2 \cos A_2}{\cos z_1 - \cos z_2}.$$

6. Una estrella de coordenadas ecuatoriales absolutas (α, δ) posee una latitud eclíptica β. Demostrar que cuando la ascensión recta del Sol es también α, entonces:

   i) $\operatorname{sen}(\lambda - \lambda_\odot) = \tan\beta \operatorname{sen}\delta_\odot \cot\alpha$.

   ii) $\tan(\lambda - \lambda_\odot) = \tan(\delta - \delta_\odot) \cos\alpha \operatorname{sen}\varepsilon$.

   siendo λ, $\lambda_\odot$, $\delta_\odot$ y ε, la longitud eclíptica de la estrella, la longitud eclíptica y declinación del Sol y la oblicuidad de la eclíptica, respectivamente.

7. Una estrella de coordenadas ecuatoriales absolutas α y δ tiene una latitud eclíptica β. Demostrar que cuando las longitudes eclípticas del Sol y de la estrella coinciden entonces $\operatorname{sen}(\alpha_\odot - \alpha)$ viene dada por

   i) $\operatorname{sen}\beta \cot\lambda \tan\delta_\odot \sec\delta$.

   ii) $\tan\beta \tan\delta_\odot \cos\alpha \csc\lambda$.

   siendo λ, $\alpha_\odot$ y $\delta_\odot$, la longitud eclíptica de la estrella y las coordenadas absolutas del Sol, respectivamente.

8. Obtener las fórmulas diferenciales que relacionan variaciones infinitesimales del acimut y de la altura con variaciones infinitesimales de la latitud.

9. Determinar el ángulo que forma la eclíptica con el horizonte de un lugar del hemisferio norte en función de la hora sidérea, y estudiar las horas en las que alcanza su mínimo y su máximo.

10. Una estrella se desplaza una pequeña cantidad dr hacia un punto O en la esfera celeste de coordenadas ecuatoriales absolutas (α_0, δ_0). Demostrar que las variaciones en sus coordenadas ecuatoriales absolutas (α, δ) vienen dadas por:

    $d\delta = (\cos\delta_0 \operatorname{sen}\delta \cos(\alpha - \alpha_0) - \operatorname{sen}\delta_0 \cos\delta) \csc r \, dr$,

    $\cos\delta \, d\alpha = \cos\delta_0 \operatorname{sen}(\alpha - \alpha_0) \csc r \, dr$.

6. Movimiento Diurno

Los puntos de la superficie terrestre se mueven respecto a las estrellas del firmamento pero desde la Tierra son éstas las que parecen moverse. Un observador situado en la superficie de la Tierra ve aparecer los astros por el Este describiendo un arco sobre el horizonte hasta que desaparecen por el Oeste, alcanzando el punto más alto sobre el horizonte al atravesar el meridiano del lugar. El Sol, la Luna y los planetas también participan de este movimiento.

Definición 6.1 *Se denomina movimiento diurno al movimiento de los astros sobre la esfera celeste en círculos paralelos al ecuador celeste en sentido retrógrado, producidos por el movimiento de rotación de la Tierra en sentido directo alrededor de su eje de rotación.*

Es claro que este movimiento no presenta el mismo aspecto en todos los puntos de la Tierra.

6.1. Culminación de un astro

Definición 6.2 *Se llaman culminaciones de un astro a cada una de las dos posiciones E y E' que ocupa dicho astro a su paso por el meridiano del lugar en su movimiento diurno. La posición de paso del astro por el meridiano superior se llama culminación superior, y culminación inferior cuando pasa por el meridiano inferior.*

Propiedades En las culminaciones de un astro se cumple que:

- La altura del astro es máxima en la culminación superior y mínima en la culminación inferior.
- La diferencia de tiempo entre ambas posiciones es de 12^h sidéreas.
- Los ángulos horarios de las culminaciones superior e inferior son, respectivamente, 0^h y 12^h.

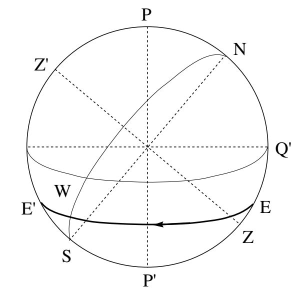
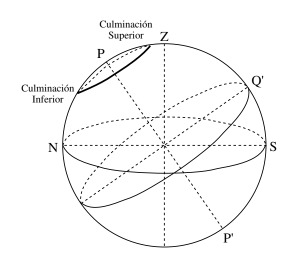


Figura 6.1: Observador situado en el hemisferio sur. Culminación superior entre Z y Q'

No se puede establecer ninguna propiedad general para los acimutes de ambas posiciones pues dependerán tanto del lugar de observación como de la situación del astro sobre la esfera celeste.

Si consideramos una estrella cuya culminación superior se produce entre el cénit y el punto Q', para un observador situado en el hemisferio norte el acimut de la culminación superior es 0º, el acimut de esta posición para un observador situado en el hemisferio sur vale 180º, y los acimutes de las culminaciones inferiores valen 180º y 0º para observadores situados en el hemisferio norte y sur, respectivamente.

Definición 6.3 *A aquellos astros cuya culminación superior para un lugar del hemisferio norte terrestre ocurra entre el polo norte celeste y el cénit y entre el polo sur celeste y el cénit para lugares del hemisferio sur terrestre permaneciendo siempre por encima del horizonte se les denomina* circumpolares.



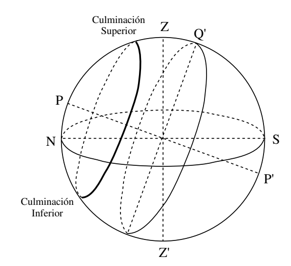


Figura 6.2: Culminaciones superior e inferior de astros tales que $\delta > \phi$ para un observador situado en el hemisferio norte

Si el astro es circumpolar, para un lugar del hemisferio norte terrestre el acimut de la culminación superior y de la inferior vale 180° y para un lugar del hemisferio sur terrestre en ambas posiciones el acimut vale 0°. Habitualmente se utiliza la expresión *un astro culmina* para referirnos a la culminación superior del astro.

A continuación se realiza el análisis de las culminaciones de un astro situado en el hemisferio norte celeste ($\delta > 0°$) y para un lugar de observación situado en el hemisferio norte terrestre ($\phi > 0°$).

En función de la culminación superior puede suceder que ésta ocurra entre el polo norte celeste y el cénit o entre el cénit y el punto Q'.

- Si el astro culmina entre los puntos P y Z entonces $\delta > \phi$ y las coordenadas horizontales y horarias de la culminación superior son: $A = 180°$, $h = \phi - \delta + 90°$ y $H = 0^h$. Dependiendo de la latitud del lugar de observación y de la declinación del astro la culminación inferior puede producirse entre el polo norte celeste y el punto cardinal norte o entre este último punto y el punto diametralmente opuesto al punto Q'. En el primer caso se tiene que: $A = 180°$, $h = \phi + \delta - 90°$ y $H = 12^h$; y consecuentemente $\delta + \phi > 90°$. En el segundo caso el acimut y el ángulo horario tienen el mismo valor que en el caso anterior, pero como ahora el astro está debajo del horizonte su altura vendrá dada por el valor negativo de $90° - \phi - \delta$; esto es, $h = \phi + \delta - 90°$; y por tanto $\delta + \phi < 90°$.
- Si la culminación superior ocurre entre Z y el punto Q' entonces $\delta < \phi$ y sus coordenadas horizontales y horarias son: $A = 0°$, $h = 90° - \phi + \delta$ y $H = 0^h$. Al igual que sucedía en el caso anterior, dependiendo de la latitud del lugar de observación y de la declinación del astro, la culminación inferior puede ocurrir entre los puntos P y N o entre los puntos N y Q. En ambos casos las expresiones generales de las coordenadas son: $A = 180°$, $h = \phi + \delta - 90°$ y $H = 12^h$, pero mientras que en el primer caso la altura es positiva, en el segundo será negativa.

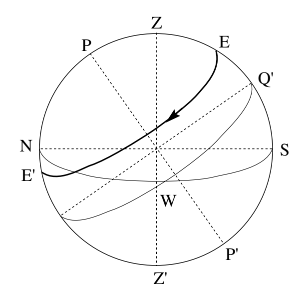


Figura 6.3: Observador situado en el hemisferio norte. Culminación superior entre Z y Q'

Si el astro estuviese en el hemisferio sur celeste ($\delta < 0°$) entonces la culminación superior puede ocurrir entre el punto Q' y el punto sur celeste o entre el punto sur y el polo sur celestes.

Siguiendo el método de análisis anterior se comprueba que cuando el astro culmina entre Q' y S las coordenadas horizontales y horarias de la culminación superior vienen dadas por $A = 0°$, $h = 90° - \phi + \delta$ y $H = 0^h$ y de la culminación inferior por $A = 180°$, $h = 90° - \phi + |\delta|$ y $H = 12^h$. Cuando la culminación superior se produce entre S y P' sus coordenadas son $A = 0°$, $h = 90° - \phi - \delta$ y $H = 0^h$ y de la culminación inferior $A = 180°$, $h = |\delta| - 90° - \phi$ y $H = 12^h$.

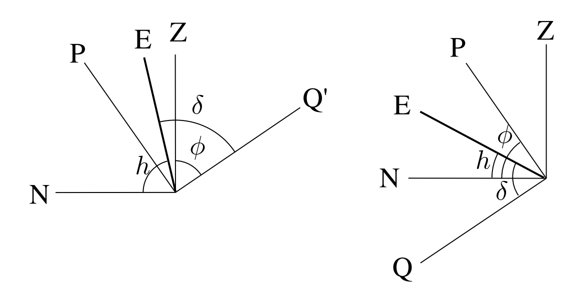


Figura 6.4: Análisis geométrico de las culminaciones superior e inferior de astros tales que $\delta > \phi > 0^o$ y que culminan inferiormente entre P y N

La hora sidérea de las culminaciones superiores es igual a la ascensión recta y a la ascensión recta más 12^h en las culminaciones inferiores. Para calcular las coordenadas eclípticas suponiendo conocidas las coordenadas absolutas bastará resolver el triángulo de posición considerando la oblicuidad de la eclíptica constante.

6.2. Posiciones correspondientes

Definición 6.4 *Se llaman posiciones correspondientes de un astro a las posiciones simétricas respecto del meridiano del lugar.*

Propiedades Si E y E' son posiciones correspondientes de un astro entonces se cumple que:

- $h = h'$.
- $A + A' = 360^o$.
- $H + H' = 24^h$.

siendo h, A y H, la altura, el acimut y el ángulo horario de E y h', A' y H' de su posición correspondiente E'.

6.2.1. Máximas digresiones

Definición 6.5 *Se llaman posiciones de* máxima digresión *de un astro, o simplemente* máximas digresiones, *a cada una de las dos posiciones correspondientes en las que el vertical que pasa por ellas es tangente al paralelo descrito por el astro en su movimiento diurno. Se denomina* máxima digresión occidental *a la posición más próxima al punto oeste celeste y* máxima digresión oriental *a la más próxima al punto este celeste.*

Proposición 6.1 *La condición necesaria y suficiente para que un astro situado en el hemisferio norte celeste ($\delta > 0^o$) y un observador del hemisferio norte terrestre*

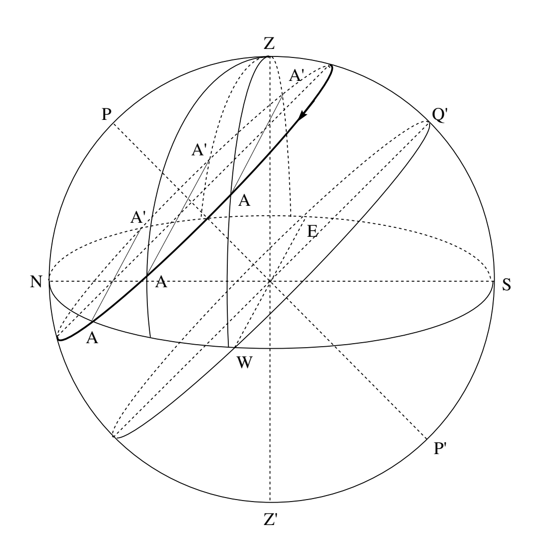


Figura 6.5: Posiciones correspondientes de un astro

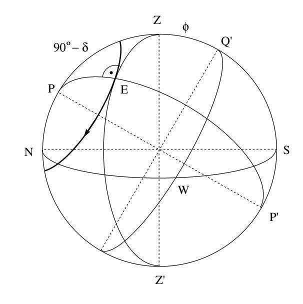


Figura 6.6: Máxima digresión occidental de un astro

($\phi > 0^o$) tenga posiciones de máxima digresión viene dada por $\delta > \phi$.

Propiedades Si E_1 y E_2 son las posiciones de máxima digresión occidental y oriental de un astro entonces se cumplen las siguientes propiedades:

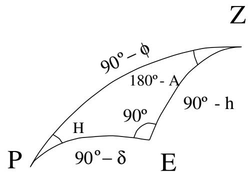
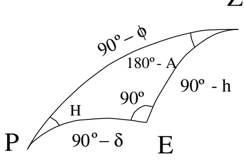
- Por ser posiciones correspondientes,

$$h_{E_1} = h_{E_2}, \quad A_{E_1} + A_{E_2} = 360^{\rm o} \quad \text{y} \quad H_{E_1} + H_{E_2} = 24^h.$$

- Los acimutes mínimo y máximo de un astro que tiene posiciones de máxima digresión se producen en la máxima digresión occidental y oriental, respectivamente.
- Si un astro está en el hemisferio norte celeste ($\delta > 0^{\rm o}$) y el lugar de observación está situado en el hemisferio norte terrestre ($\phi > 0^{\rm o}$) entonces $90^{\rm o} < A_{E_1} < 180^{\rm o}$ y $180^{\rm o} < A_{E_2} < 270^{\rm o}$.

Proposición 6.2 *Sean $\phi > 0^o$ y $\delta > 0^o$ la latitud de un lugar y la declinación de un astro. Entonces el acimut, la altura y el ángulo horario de las posiciones de máxima digresión occidental E_1 y oriental E_2 vienen dados por*

$$\begin{aligned} \cos H_1 &= \tan\phi \,\cot\delta, & H_2 &= 24^h - H_1, \\ \operatorname{sen} A_1 &= \cos\delta \,\sec\phi, & A_2 &= 360^o - A_1, \\ \operatorname{sen} h_1 &= \operatorname{sen}\phi \,\operatorname{cosec}\delta, & h_2 &= h_1. \end{aligned}$$

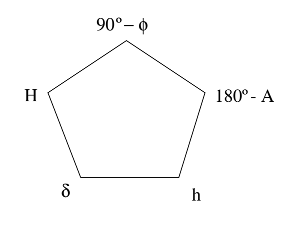


Figura 6.7

Demostración. En cualquiera de las máximas digresiones de un astro, debido a que el vertical es tangente al paralelo que describe, el ángulo paraláctico es recto.

Por tanto, el triángulo de posición que define una posición de máxima digresión será un triángulo esférico rectángulo.

Los vértices del pentágono de Neper enumerados en sentido directo para la máxima digresión occidental son

$$90^{\circ} - \phi, \quad H_1, \quad \delta, \quad h_1, \quad 180^{\circ} - A_1.$$

Aplicando las reglas de Neper se obtiene

$$\begin{aligned} \cos H_1 &= \cot(90^{\circ} - \phi) \cot\delta = \tan\phi \cot\delta \\ \cos(90^{\circ} - \phi) &= \operatorname{sen}\delta \operatorname{sen} h_1 \Rightarrow \operatorname{sen} h_1 = \operatorname{sen}\phi \operatorname{cosec}\delta \\ \cos\delta &= \operatorname{sen}(90^{\circ} - \phi) \operatorname{sen}(180^{\circ} - A_1) = \cos\phi \operatorname{sen} A_1 \\ &\Rightarrow \operatorname{sen} A_1 = \cos\delta \sec\phi \end{aligned}$$

Para solucionar la ambigüedad que se produce en el cálculo del acimut basta tener en cuenta que en este caso $90^{\circ} < A_1 < 180^{\circ}$. Además, en esta situación, $0^{\circ} < H_1 < 90^{\circ}$ y $h_1 > 0^{\circ}$.

Puesto que las máximas digresiones son posiciones correspondientes, los valores correspondientes para la máxima digresión oriental vienen dados directamente por

$$H_2 = 24^h - H_1, \quad A_2 = 360^{\circ} - A_1, \quad h_2 = h_1.$$

Proposición 6.3 *Todos los astros circumpolares tienen posiciones de máximas digresiones.*

6.2.2. Orto y ocaso

Definición 6.6 *Se llaman* orto *y* ocaso *de un astro a las posiciones correspondientes del astro obtenidas como la intersección del paralelo descrito en su movimiento diurno con el horizonte del lugar. De estas dos posiciones, el orto es la que está más próxima al punto este celeste y el ocaso al punto oeste celeste.*

Proposición 6.4 *La condición necesaria y suficiente para que un astro del hemisferio norte celeste ($\delta > 0^o$) al ser observado desde un lugar del hemisferio norte terrestre ($\phi > 0^o$) tenga orto y ocaso es que $\delta < 90 - \phi$.*

Propiedades Las posiciones del orto y ocaso de un astro satisfacen las siguientes propiedades:

- Por ser posiciones correspondientes,

$$h_{OCASO} = h_{ORTO}, \; A_{OCASO} + A_{ORTO} = 360^{\circ}, \; H_{OCASO} + H_{ORTO} = 24^h.$$

- En ambas posiciones la altura es nula, pues pertenecen al horizonte celeste, pero mientras que en los instantes previos y posteriores al orto la altura toma valores negativos y positivos respectivamente, en el ocaso la altura en instantes previos es positiva y en instantes posteriores es negativa. En cualquier caso
$$h_{OCASO} = h_{ORTO} = 0^{\text{o}}.$$

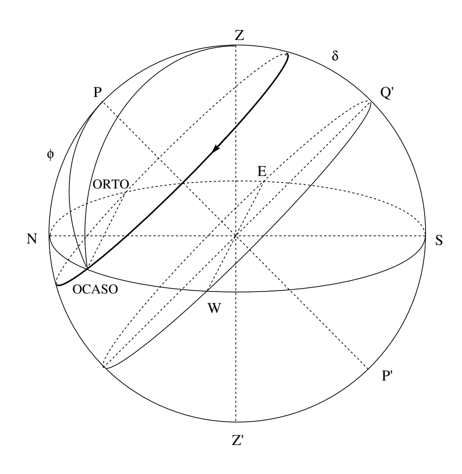


Figura 6.8: Orto y ocaso de un astro

- Los acimutes y los ángulos horarios del ocaso y del orto verifican que
$$0^{\text{o}} < A_{OCASO} < 180^{\text{o}}, \quad 180^{\text{o}} < A_{ORTO} < 360^{\text{o}},$$
$$0^h < H_{OCASO} < 12^h, \quad 12^h < H_{ORTO} < 24^h.$$

Proposición 6.5 *Sean δ y ϕ la declinación de un astro del hemisferio norte celeste y la latitud del lugar de observación del hemisferio norte terrestre. Entonces el acimut y el ángulo horario del ocaso y del orto vienen dados por*

$$\cos H_{OCASO} = -\tan\phi\,\tan\delta, \quad H_{ORTO} = 24^h - H_{OCASO},$$
$$\cos A_{OCASO} = -\operatorname{sen}\delta\,\sec\phi, \quad A_{ORTO} = 360^o - A_{OCASO}$$

Demostración. El triángulo de posición tanto en el orto como en el ocaso de un astro es un triángulo esférico rectilátero, pues al estar el astro situado sobre el horizonte, el lado cuyos vértices son el cénit y el propio astro vale 90°.

Los vértices del pentágono de Neper para el ocaso del astro son
$$180^{\text{o}} - H_{OCASO}, \quad 90^{\text{o}} + \delta, \quad \eta - 90^{\text{o}}, \quad 90^{\text{o}} - A_{OCASO}, \quad 90^{\text{o}} + \phi.$$

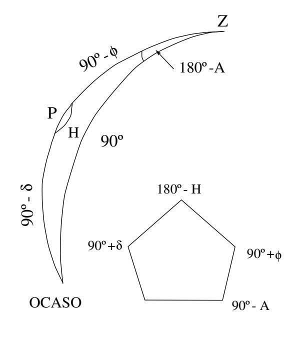


Figura 6.9

Aplicando las reglas de Neper a dicho pentágono se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \cos(180^{\rm o} - H_{OCASO}) &= -\cos H_{OCASO} = \cot(90+\phi)\,\cot(90+\delta) = \tan\phi\tan\,\delta \\ &\Rightarrow \cos H_{OCASO} = -\,\tan\phi\tan\,\delta \\ \cos(90^{\rm o}+\delta) &= \mathrm{sen}(90+\phi)\,\mathrm{sen}(90^{\rm o} - A_{OCASO}) \\ &\Rightarrow \cos A_{OCASO} = -\,\mathrm{sen}\,\delta\,\sec\phi \end{aligned}$$

Dado que el orto y el ocaso son posiciones correspondientes resulta obvio que

$$H_{ORTO} = 24^h - H_{OCASO}, \quad A_{ORTO} = 360^{\rm o} - A_{OCASO}.$$

6.2.3. Paso de un astro por el primer vertical

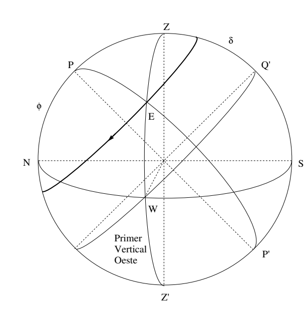


Figura 6.10: Paso de un astro por el primer vertical oeste

Definición 6.7 *Se llaman posiciones de paso de un astro por el primer vertical a las posiciones correspondientes que se obtienen como intersección del paralelo descrito por el astro en su movimiento diurno con el primer vertical. Se denominan posiciones de paso por el primer vertical este y oeste.*

Proposición 6.6 *La condición necesaria y suficiente para que un astro del hemisferio norte celeste ($\delta > 0^o$) pase por el primer vertical en un lugar de observación del hemisferio norte terreste ($\phi > 0^o$) es que $\delta < \phi$.*

Propiedades Las posiciones de paso de un astro por el primer vertical cumplen las siguientes propiedades:

- Por ser posiciones correspondientes,

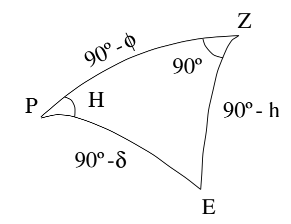
$$h_{PVW} = h_{PVE}, \quad A_{PVW} + A_{PVE} = 360^{\rm o} \quad \mathrm{y} \quad H_{PVW} + H_{PVE} = 24^h.$$

- Los acimutes de los pasos por el primer vertical oeste y este valen 90º y 270º, respectivamente.
- Los ángulos horarios de los pasos por el primer vertical satisfacen

$$0^h < H_{PVW} < 12^h \quad \mathrm{y} \quad 12^h < H_{PVE} < 24^h.$$

Proposición 6.7 *Sean δ y ϕ la declinación de un astro del hemisferio norte celeste y la latitud del lugar de observación del hemisferio norte terrestre. Entonces la altura y el ángulo horario de los pasos del astro por el primer vertical oeste y este vienen dados por*

$$\begin{aligned} \cos H_{PVW} &= \tan\delta\,\cot\phi, & H_{PVE} &= 24^h - H_{PVW}, \\ \mathrm{sen}\,h_{PVW} &= \mathrm{sen}\,\delta\,\mathrm{cosec}\,\phi, & h_{PVE} &= h_{PVW}. \end{aligned}$$



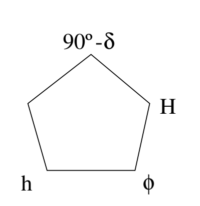


Figura 6.11

Demostración. El triángulo de posición en cualquiera de los pasos por el primer vertical es un triángulo esférico rectángulo, donde el ángulo cuyo vértice el cénit es recto.

El pentágono de Neper para el paso de un astro por el primer vertical oeste tiene de vértices

$$90^{\circ} - \delta, \quad \eta, \quad h_{PVW}, \quad \phi, \quad H_{PVW}.$$

Aplicando las reglas de Neper a este triángulo esférico se obtienen las expresiones:

$$\begin{aligned} \cos H_{PVW} &= \cot(90^{\circ} - \delta) \cot\phi = \tan\delta \cot\phi \\ \cos(90^{\circ} - \delta) = \operatorname{sen}\delta &= \operatorname{sen} h_{PVW} \operatorname{sen}\phi \\ &\Rightarrow \operatorname{sen} h_{PVW} = \operatorname{sen}\delta \operatorname{cosec}\phi \end{aligned}$$

Por ser posiciones correspondientes, la altura y el ángulo horario del paso del astro por el primer vertical este vienen dados por

$$H_{PVE} = 24^h - H_{PVW}, \quad h_{PVE} = h_{PVW}.$$

Corolario 6.1 *A modo de resumen podemos concluir que para un astro del hemisferio norte celeste ($\delta > 0^o$) y para un lugar de observación del hemisferio norte terrestre ($\phi > 0^o$) ocurrirán máximas digresiones cuando $\delta > \phi$, orto y ocaso cuando $\delta < 90^o - \phi$, y posiciones de paso por el primer vertical cuando $\delta < \phi$.*

Corolario 6.2 *Un astro que pasa por el primer vertical no tiene máximas digresiones, y recíprocamente, si tiene posiciones de máxima digresión entonces no puede pasar por el primer vertical.*

Nota Aunque en los análisis anteriores de las máximas digresiones, del orto y ocaso y del paso por el primer vertical se ha particularizado para latitudes $\phi > 0^{\circ}$ y declinaciones $\delta > 0^{\circ}$, resultaría muy conveniente que el lector resuelva el resto de las situaciones que pueden ocurrir; esto es, para $\phi > 0^{\circ}$ y $\delta < 0^{\circ}$, para $\phi < 0^{\circ}$ y $\delta > 0^{\circ}$ y para $\phi < 0^{\circ}$ y $\delta < 0^{\circ}$.

6.3. Movimiento diurno del Sol

Como ya se indicó con anterioridad, el Sol tiene dos movimientos aparentes: uno de carácter anual recorriendo la eclíptica en sentido directo y otro de carácter diurno describiendo un paralelo celeste alrededor del eje celeste en sentido retrógrado. Estos movimientos se deben al movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol y a la rotación terrestre, respectivamente.

Ambos movimientos están relacionados íntimamente, de tal suerte que antes de analizar con detalle el movimiento diurno del Sol y sus consecuencias estableceremos algunas características del movimiento anual del Sol.

En un día cualquiera del año queda determinado un triángulo de vértices la posición del Sol sobre la eclíptica, el punto Aries y el punto intersección entre

el meridiano celeste que pasa por el Sol y el ecuador celeste. Los lados de este triángulo vienen dados por la longitud eclíptica, la declinación y la ascensión recta del Sol. El ángulo correspondiente al vértice Aries es la oblicuidad de la eclíptica, y por estar determinado por la intersección de un meridiano con el ecuador celeste, el ángulo opuesto al lado cuyo valor es la longitud eclíptica será recto.

Así, pues, tendremos un triángulo esférico rectángulo que nos proporcionará relaciones muy interesantes entre las coordenadas absolutas, las coordenadas eclípticas del Sol y la oblicuidad de la eclíptica.

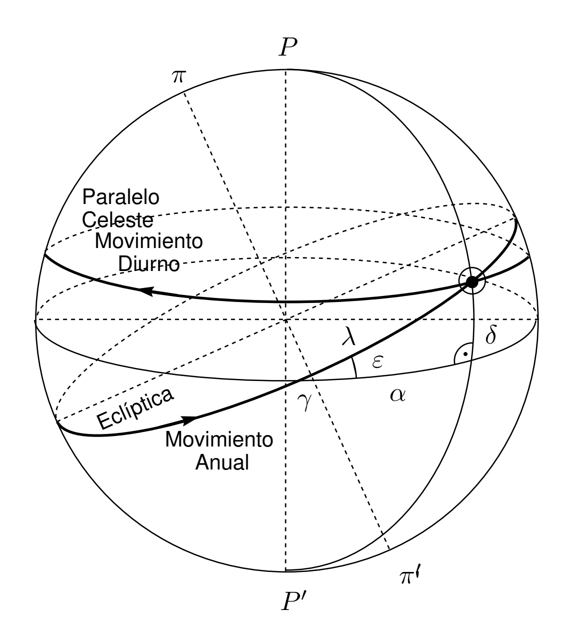


Figura 6.12: Movimientos diurno y anual del Sol

En su movimiento diurno el Sol describe un paralelo celeste cuya declinación consideraremos constante para cada día. Puesto que la declinación del Sol varía entre el valor positivo y negativo de la oblicuidad de la eclíptica, a lo largo del año variarán los instantes de orto y ocaso, de paso por el primer vertical y de máxima digresión del Sol para un determinado lugar.

En cualquier caso podemos establecer las siguientes definiciones:

Definición 6.8 *Con respecto a las culminaciones del Sol en un determinado lugar se definen:*

Mediodía y medianoche ... Instantes en que el Sol está situado sobre el meridiano superior e inferior de un lugar, respectivamente.

Día solar ... Intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol

por el meridiano superior del lugar de observación.

Definición 6.9 *Con respecto al orto y ocaso del Sol en un determinado lugar se definen:*

Noche y día ... Intervalos de tiempo transcurridos entre el ocaso y el orto y entre el orto y el ocaso del Sol.

Crepúsculo ... Efecto debido a la existencia de la atmósfera por el que la luz del Sol es visible aún cuando esté por debajo del horizonte. Se denominan crepúspulos civil, náutico y astronómico a los intervalos de tiempo correspondientes a las alturas del Sol entre 0º y -6º, entre 0º y -12º y entre 0º y -18º, respectivamente. Al crepúsculo posterior al ocaso del Sol se le denomina crepúsculo vespertino *y* crepúsculo matutino *al anterior al orto del Sol.*

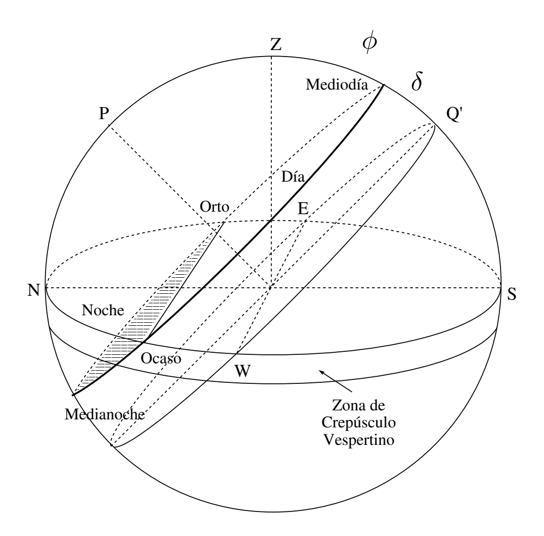


Figura 6.13: Movimiento diurno del Sol y situaciones asociadas

Corolario 6.3 *Consecuencia directa de las anteriores definiciones son los siguientes resultados:*

- *La duración de la noche y el día depende de la latitud del lugar y de la ascensión recta y declinación del Sol.*
- *El crepúsculo disminuye la duración de la noche y aumenta la del día.*
- *El meridiano del lugar divide en dos partes iguales la noche y el día.*
- *Puesto que el Sol recorre el ecuador celeste en los equinoccios (21–Marzo, 21–Septiembre) el orto y ocaso del Sol coinciden con los puntos este y oeste únicamente en dichas fechas.*
- *Sin tener en cuenta el crepúsculo, en los equinoccios la noche y el día tienen*

la misma duración.

6.4. Problemas

1. Analizar las culminaciones superior e inferior de un astro tal que $\delta < 0^o$.
2. Analizar las máximas digresiones de un astro para $\phi > 0^o$ y $\delta < 0^o$.
3. Analizar el orto y el ocaso de un astro para $\phi < 0^o$ y $\delta > 0^o$.
4. Analizar el paso de un astro por el primer vertical para $\phi < 0^o$ y $\delta < 0^o$.
5. Situar sobre la esfera celeste una estrella de coordenadas ecuatoriales absolutas $\alpha = 0^h$ y $\delta = -40^o$, el día 21 de septiembre para un observador situado en un lugar de latitud $\phi = 40^o N$, seis horas después de la salida del Sol.
6. Sean E_1 y E_2 dos estrellas tales que la distancia cenital hacia el norte de E_1 es $z_{E_1} = 60^o$ y la declinación de E_2 es $\delta_{E_2} = -60^o$. Situar, explicando razonadamente, en la esfera celeste para un lugar de latitud $\phi = 30^o\ N$, el día 21 de Marzo, la estrella E_1, $15^h 35^m$ después de la salida del Sol y la estrella E_2, 6^h antes del ocaso del Sol.
7. Ana, la protagonista de la película de Julio Medem "Los amantes del Círculo Polar", se sienta a orillas de un gran lago situado en el Círculo Polar Ártico, a disfrutar de la puesta de Sol y contempla como el Sol desde dicho instante hasta el amanecer toca en un único punto la superficie del lago permaneciendo siempre por encima de él. ¿Donde vería Ana una estrella de coordenadas absolutas $(12^h, -\varepsilon)$, 6^h antes de dicho instante. Explicar y representar sobre la esfera celeste ambas situaciones.
8. En un lugar del Hemisferio Sur y un cierto día del año se produce el mediodía a las 18^h sidéreas. Determinar la fecha y situar el Sol en la esfera celeste dicho día a medianoche, considerando que la latitud del lugar es $\phi = 40^o S$.
9. En un lugar del Hemisferio Norte y un cierto día del año se produce la medianoche a las 18^h sidéreas. Determinar la fecha y situar el Sol en en la esfera celeste en dicho instante para un lugar de latitud $\phi = 40^o N$.
10. ¿Dónde estará una estrella cuya ascensión recta es 12^h, 6^h antes del ocaso del Sol para un observador situado en el Ecuador Terrestre, el día en que a las 18^h de tiempo sidéreo ocurre el mediodía?. Indicar la fecha, representar gráficamente y justificar la respuesta.
11. Se sabe que en un determinado instante las coordenadas eclípticas del cénit de un lugar son $(18^h, \varepsilon)$. ¿Dónde estará una estrella cuya ascensión recta es 12^h en dicho instante? Si en ese día la culminación superior del Sol se produce a las 18^h sidéreas, ¿dónde estará el Sol 12^h después de ese instante? Representar ambas situaciones sobre la esfera celeste y explicar razonadamente.
12. En un lugar de latitud $\phi = 45^o\ S$ se observa que la culminación inferior del

Sol se produce a las 12^h de tiempo sidéreo. Determinar la fecha y situar sobre la esfera celeste, 4^h antes del orto del Sol de ese día, una estrella cuya ascensión recta vale 14^h sabiendo, además, que dicha estrella no es visible salvo en un único punto del horizonte celeste. Explicar razonadamente.

13. En un lugar de latitud $\phi = 45^o\, N$ se observa que el ángulo horario del ocaso del Sol vale 6^h produciéndose a las 18^h de tiempo sidéreo. Determinar la fecha y representar a medianoche de dicha fecha una estrella cuya ascensión recta es 0^h sabiendo que no es visible salvo en un único punto del horizonte celeste. Explicar razonadamente.

14. En un lugar de latitud $\phi = 40^o\, S$ se observa que el ángulo horario del orto del Sol vale 18^h. Determinad las posibles fechas en que ocurre tal suceso y situad en la esfera celeste, en dichas fechas, una estrella cuya ascensión recta es 4^h, 2^h antes del orto del Sol, sabiendo además que la estrella no es visible salvo en un único punto del horizonte celeste. Explicad razonadamente.

15. ¿Dónde estará el polo sur de la eclíptica para un lugar situado en el Trópico de Cáncer $(\phi = \epsilon)$, 6^h antes de la medianoche del 21 de Marzo? Representar gráficamente y explicar razonadamente.

16. En un observatorio del hemisferio sur se observa una estrella de coordenadas absolutas $(5^h15^m, 15^o)$ en su culminación superior resultando ser su altura 65°. Representar sobre la esfera celeste, para ese lugar de observación, una estrella de coordenadas absolutas $(7^h, -40^o)$, 1^h después del ocaso del Sol el día 21 de Septiembre.

17. ¿Dónde estará el polo norte de la eclíptica para un lugar situado en el Círculo Polar Antártico $(\phi = 90^o - \epsilon)$ al mediodía del 21 de Junio? Representar y explicar razonadamente.

18. Sean z_1 y z_2 son las distancias cenitales de una estrella en su culminación superior y en el primer vertical, respectivamente. Demostrar que:

$$\cot\delta = \csc z_1 \, \sec z_2 - \cot z_1 .$$

19. En lugar de latitud norte ϕ, dos estrellas E_1 y E_2 de declinaciones respectivas δ_1 y δ_2, tienen el ocaso en el mismo instante y cuando E_1 está en su orto, E_2 está en su culminación inferior. Sabiendo que $\delta_1 = -\delta_2 > 0$ demostrar que se cumple:

$$\tan\phi \, \tan\delta_2 \, = \, 2\, \tan^2\phi \, \tan^2\delta_1 \, - \, 1.$$

20. Si H y H' son los ángulos horarios de una estrella de declinación $\delta > 0$, en el primer vertical al oeste y en su ocaso, respectivamente, probar que:

$$\cos H \cos H' + \tan^2\delta = 0.$$

21. Si h es la altura del Sol en el primer vertical al oeste en un lugar de latitud ϕ, $\lambda_\odot$ es la longitud eclíptica del Sol y ε la oblicuidad de la eclíptica, probar

que

$$\operatorname{sen}\phi = \operatorname{sen}\lambda_{\odot}\ \operatorname{sen}\varepsilon\ \csc h.$$

22. En un cierto lugar de latitud desconocida se observa la distancia cenital de una estrella en su culminación al norte del cenit y el acimut en el ocaso. Determinar la latitud del lugar.

23. Las distancias cenitales de una estrella en su culminación superior y en su paso por el primer vertical al oeste son z_1 y z_2, respectivamente. Demostrar que:

$$\tan\phi = \frac{\operatorname{sen} z_1}{\cos z_1 - \cos z_2}.$$

24. Se observa una estrella a su paso por el meridiano superior y en su ocaso, obteniéndose una distancia cenital z_m en el instante de paso por el meridiano de y un acimut A al ocaso. Calcular la latitud del lugar de observación.

25. Demostrar que si dos estrellas de coordenadas ecuatoriales absolutas (α_1, δ_1) y (α_2, δ_2) tienen el orto a la misma hora sidérea en un lugar de latitud ϕ se verifica que:

$$\cot^2\phi \operatorname{sen}^2(\alpha_2 - \alpha_1) = \tan^2\delta_1 + \tan^2\delta_2 - 2\tan\delta_1\tan\delta_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1).$$

26. Determinar el tiempo sidéreo transcurrido desde el orto de una estrella de coordenadas absolutas $(\alpha, \delta > 0^o)$ hasta su máxima digresión oeste en un lugar de latitud $\phi > 0^o$.

27. Una estrella de declinación $\delta_1 > 0^o$, cruza el primer vertical este poco después de su orto y ΔH_1 antes que lo haga otra estrella de declinación, δ_2, 10° mayor que la primera, y de igual ascensión recta. Sabiendo que la segunda estrella tarda ΔH_2 en pasar del primer vertical al círculo horario de H^h, indicar el procedimiento de cálculo de la latitud del lugar y de las declinaciones de ambas estrellas.

28. En cierto lugar del hemisferio norte se observa que el día del solsticio de junio, el Sol tarda $H = 7^h$ en pasar de la culminación superior al ocaso. Dos horas sidéreas después del ocaso del Sol se ve salir una estrella por el vertical de 315°. Considerando $\epsilon = 23^o27'$, calcular la latitud del lugar y las coordenadas ecuatoriales absolutas de dicha estrella.

29. En cierto lugar se observa que una estrella sale a las 6^h30^m y se pone a las 17^h50^m, ambas de hora sidérea. Sabiendo que la distancia cenital en la culminación superior es de 32°, calcular las coordenadas ecuatoriales absolutas de la estrella, así como la latitud del lugar.

30. En un lugar se mide la distancia cenital de la culminación superior del Sol, el día del solsticio de junio, resultando ser $z = 27'$. Utilizando $\epsilon = 23^o26'$, calcular la latitud del lugar, el acimut del Sol a las 10^h de tiempo sidéreo y el acimut del Sol en el ocaso.

31. En cierto lugar del hemisferio norte, se coloca verticalmente una varilla de longitud 2.5 metros. Se observa que la sombra que proyecta el día del solsticio de diciembre en el momento de la culminación superior del Sol mide 7.5 metros. Tomando como valor de la oblicuidad de la eclíptica $\epsilon = 23^o27'$. Calcular la latitud del lugar y la longitud de la sombra el día del solsticio de junio en la culminación superior del Sol.

32. En el equinoccio de otoño y en un lugar de latitud $\phi = 40^o30'$ se observa que a las 14^h sidéreas una varilla de 10 metros de altura no produce sombra. Determinar el acimut en donde está situada la varilla y calcular la longitud de la sombra 2^h antes del ocaso del Sol.

33. Cierto día la culminación superior del Sol en un lugar de latitud ϕ se produce a las 4^h de tiempo sidéreo y en ese instante se mide la sombra de una torre, que resulta ser 161.226 metros. Suponiendo la declinación constante a lo largo del día y sabiendo que ese día el ángulo horario del Sol en el ocaso fue 7^h42^m, calcular las coordenadas absolutas del Sol dicho día, la latitud del lugar y la altura de la torre. Considerar la oblicuidad de la eclíptica $\varepsilon = 23^o26'$.

34. Un muro vertical de 10 metros de altura forma con el punto cardinal norte un ángulo de $30^o2'$ medidos hacia el este. El muro está situado en un punto cuya colatitud es $49^o35'$. Determinar la longitud de la sombra proyectada por el muro en el plano horizontal, dos horas antes de que el Sol pase por el meridiano superior el día del solsticio de invierno. Considérese $\varepsilon = 23^o24'$.

35. Dos lugares tienen la misma latitud y una diferencia de longitudes $\Delta\Lambda$. La distancia polar del círculo máximo que pasa por ellos es igual a la declinación del Sol un determinado día. Probar que para ese día la duración de la noche en esos lugares es igual a la diferencia de longitudes $\Delta\Lambda$.

36. Demostrar que si ψ es el ángulo que forma la trayectoria de una estrella con el horizonte entonces

$$\cos\psi = \operatorname{sen}\phi \sec\delta.$$

7. El tiempo y su medida

El objeto fundamental de la Astronomía de Posición es la determinación precisa de las posiciones de los astros y los cambios que en éstas se producen. Por ello, se hace imprescindible establecer alguna variable que nos mida estas variaciones posicionales. Si nos referimos al Universo podemos definir el *tiempo* como la variable que describe los cambios que experimentan las coordenadas espaciales de los astros, estando pues íntimamente relacionado con la idea de movimiento.

La medida del movimiento consiste en correlacionar las posiciones sucesivas de un sistema físico con las posiciones de otro sistema y, por tanto, el tiempo consistirá fundamentalmente en la ordenación de diferentes estructuras espaciales sucesivas o sucesos con respecto a otras estructuras sucesivas.

La ordenación de sucesos mediante comparación con otra serie de sucesos proporcionará distintos tiempos en función de la serie de sucesos que se elija como base de la comparación. En cualquier caso, tanto la serie de sucesos a ordenar como el suceso o sucesos que se elijan de referencia, han de ser simultáneos.

Según se elijan los sucesos de referencia, tendremos diferentes métodos de medida del tiempo. Estos métodos se pueden agrupar básicamente en dos categorías. La primera de ellas se reduce a contar *sucesos periódicos*, por ejemplo, las oscilaciones de un péndulo, de un cristal de cuarzo, o de un átomo excitado. Si suponemos que las oscilaciones son todas físicamente iguales bastará ir contando sucesivas oscilaciones para obtener una serie discontinua de sucesos del mismo período. Esta serie de sucesos constituye una *escala de tiempo*, tomando un múltiplo o submúltiplo del período de oscilación como *unidad* y fijando arbitrariamente una oscilación inicial como *origen* de la escala.

La segunda categoría de métodos de medida del tiempo consiste en el estudio y medida de movimientos continuos, por ejemplo, el movimiento de rotación o traslación de la Tierra. Las posiciones sucesivas del movimiento continuo constituyen una serie ininterrumpida de sucesos que están definidos por los espacios recorridos en dicho movimiento, considerándose por definición, que las duraciones entre dos sucesos o intervalos de tiempo son iguales cuando los espacios recorridos son iguales. La escala de tiempo se establece adoptando un intervalo unidad entre dos posiciones arbitrarias y una posición origen o cero de la escala.

En cualquier caso, tanto la definición como la medida del tiempo se reducen al establecimiento de una escala de tiempo que responda a dos problemas fundamentales en Astronomía: el orden en que acaecen los sucesos, o cronología, y la medida de su duración o la cronometría.

La ordenación temporal de los sucesos no tendría ningún sentido si el Universo fuera estático, pues solamente ocurriría un único suceso constituido por la posición

inmutable de cada astro en el espacio. Sin embargo, la observación muestra que los astros cambian sus posiciones relativas, y consecuentemente, el movimiento del Universo.

7.1. Escalas y unidades de tiempo

Si se efectúan dos o más medidas de las coordenadas espaciales (x, y, z) de un cuerpo del Universo respecto de un sistema de referencia $\{O; X, Y, Z\}$, se obtienen valores diferentes de x, y y z en las sucesivas medidas. Para expresar esta variabilidad de las coordenadas espaciales se las considera como funciones de una variable t, denominada *tiempo*, cuyo dominio es el conjunto de los números reales:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Si $t_1, t_2, t_3, ...$ son valores arbitrarios de t, que definen las estructuras espaciales

$$E_1(x_1, y_1, z_1), E_2(x_2, y_2, z_2), E_3(x_3, y_3, z_3), ...$$

entonces se obtiene un conjunto de pares ordenados de estructuras espaciales E y valores de t: $\{(E_1, t_1), (E_2, t_2), (E_3, t_3), ...\}$. Este conjunto define una función que hace corresponder a cada valor de t un estado o estructura espacial E:

$$E = E(x, y, z, t).$$

Esta función establece una relación de orden temporal, de forma que un determinado suceso (A, t_1) es *anterior*, *posterior* o *simultáneo* a otro suceso (B, t_2), según el valor numérico t_1 sea menor, mayor o igual que t_2, respectivamente. Además, si A es anterior a B y B es anterior a C, entonces A es anterior a C.

Una vez establecida una ordenación temporal de los sucesos, es necesario asignar una estructura métrica que permita medir la duración de un suceso. Esto equivale a definir matemáticamente el intervalo temporal existente entre dos valores numéricos de la variable t. Esto es, si a tres sucesos A, B y C les corresponden tres números reales t_1, t_2 y t_3, y se establece una ordenación temporal entre ellos de forma que si $t_1 < t_2 < t_3$ entonces el suceso C es posterior al suceso B y éste es posterior a A, entonces el intervalo temporal entre los sucesos A y B y entre B y C queda definido por los intervalos reales de extremos t_1 y t_2 y por t_2 y t_3, respectivamente.

Así, pues, la medida del tiempo, ya sea en su aspecto de ordenación de sucesos o en el de la medida de intervalos de tiempo, exige la determinación previa de escalas de tiempo que permitan realizar ambos procesos. La determinación completa de una escala de tiempo, con fines cronológicos y cronométricos, lleva consigo las tres definiciones siguientes:

i) Definición de un tiempo físico mediante la elección de un determinado sistema dinámico que permita disponer de una secuencia continua e indefinida de fenómenos periódicos que sirvan como referencia patrón de los demás

sucesos que se producen en el Universo. Generalmente esta definición constituye la escala de tiempo propiamente dicha, pudiéndose afirmar que una escala de tiempo es la cronología u ordenación de una determinada serie de sucesos que permite el estudio cuantitativo de los todos los demás sucesos.

ii) Definición de la unidad de tiempo, como el intervalo de tiempo que separa dos sucesos elegidos fijos en la escala de tiempo.

iii) Definición de un origen de la escala, que permite expresar la época o instante en que ocurre un determinado suceso midiendo el número de unidades de tiempo que existen entre dicho origen y la época en que ocurre.

Para medir la duración de un determinado fenómeno, respecto a una escala de tiempo dada, basta con determinar la diferencia numérica entre las épocas correspondientes a los instantes inicial y final.

Una escala de tiempo también puede construirse definiendo en primer lugar una unidad de tiempo y a partir de ella generar la escala como suma indefinida de dichas unidades de tiempo.

Si la unidad de tiempo es una magnitud homogénea, reproducible e invariable, entonces la escala de tiempo será *uniforme*. Si se observa un determinado fenómeno físico que comienza y termina con los sucesos A y B y los tiempos asociados a estos dos sucesos, medidos respecto de una escala de tiempo t, son t_A y t_B, entonces la duración del fenómeno es $t_B - t_A$. Si se repite el mismo fenómeno bajo idénticas condiciones, los tiempos de comienzo y fin, respecto de la misma escala de tiempo t serán ahora t'_A y t'_B, y la duración del fenómeno $t'_B - t'_A$. La escala de tiempo t se dice que es *uniforme* si se cumple que

$$t_B - t_A = t'_B - t'_A$$



Figura 7.1: Escala de tiempo uniforme

cualesquiera que sean t_A y t'_A. Asimismo, una escala de tiempo puede ser uniforme respecto de unos fenómenos y no uniforme respecto a otros. El concepto de uniformidad del tiempo es relativo, no existiendo un tiempo absoluto uniforme, de forma que la uniformidad definida por la expresión anterior es siempre relativa a un determinado tipo de fenómenos físicos.

Si se miden unos determinados fenómenos físicos con una escala de tiempo que no es uniforme respecto de dichos fenómenos entonces se cometen dos posibles errores, denominados *error absoluto de uniformidad* y *error relativo de uniformidad* que se definen, respectivamente, por

$$\varepsilon = (t'_B - t'_A) - (t_B - t_A), \text{ y } \rho = \frac{(t'_B - t'_A) - (t_B - t_A)}{t_B - t_A}.$$

Una escala de tiempo es *estable* si las unidades sucesivas tienen la misma duración y es *exacta* si la duración de las unidades sucesivas coincide con la definición de la unidad adoptada. La accesibilidad de una escala representa la posibilidad de conocer con la menor demora posible el valor correspondiente en esa escala a un

instante determinado mediante cualquier sistema físico. Así, un reloj es cualquier sistema físico que permita determinar el valor numérico de la variable tiempo t correspondiente a un estado del sistema.

Podemos concluir que el problema de la medida del tiempo se reduce a establecer una escala observable de tiempo que sea lo más uniforme posible y que permita ordenar los sucesos y medir la duración de fenómenos físicos, exigiéndose además que sea estable, exacta y lo más accesible posible.

Según sean los fenómenos en que se basen podemos clasificar las escalas de tiempo en: escalas de tiempo astronómicas y escalas de tiempo físicas. Los movimientos de rotación y traslación de la Tierra, considerada como un sólido indeformable, son los principales fenómenos astronómicos mediante los cuales construimos las escalas de tiempo astronómicas; y las transiciones del átomo de cesio permiten definir escalas de tiempo físicas.

Si consideramos el movimiento de rotación de la Tierra entonces se obtendrán *escalas de tiempo rotacionales*. Las sucesivas posiciones de la Tierra en su movimiento de rotación se pueden determinar respecto a un lugar de observación situado sobre la superficie terrestre por el valor del ángulo horario de los astros, de forma que el movimiento continuo de la rotación terrestre se determina por medidas angulares, que establecen una correspondencia entre los valores de los ángulos y la variable tiempo t. La medida del tiempo se reduce así a medidas de ángulos. El ángulo horario del Sol determina el *tiempo solar*, mientras que el ángulo horario del punto Aries determina el *tiempo sidéreo*.

Para fijar una escala de tiempo rotacional, la unidad astronómica fundamental adoptada es el *día solar* o el *día sidéreo*, definidos como el intervalo de tiempo necesario para que el ángulo horario del Sol o del punto Aries aumente 24^h, o también como el intervalo de tiempo transcurrido entre dos culminaciones superiores sucesivas del Sol o del punto Aries.

A partir del día así definido, se define el *segundo* como la 86400-ava parte del día. Obviamente, la Tierra no es un sólido indeformable y las irregularidades de la rotación terrestre hacen fluctuar la duración del día, por lo que las escalas de tiempo rotacionales no son uniformes. No obstante, estas escalas tienen en la vida cotidiana una importancia fundamental.

Para evitar las irregularidades que la rotación terrestre introduce en la determinación del tiempo, se recurre a definir escalas de tiempo astronómicas basadas en el movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol, que se traduce en el movimiento aparente del Sol respecto de la Tierra.

En estas escalas de tiempo, la unidad es el *año sidéreo*, el *año trópico* o el *año anomalístico*, definidos respectivamente como el intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol en su movimiento de traslación por un determinado punto arbitrario de la esfera celeste, por el punto Aries o por el perigeo de la órbita solar. Este mismo fenómeno se utiliza para definir la *escala de tiempo de efemérides* que se establece a partir de las longitudes eclípticas medias del Sol

y definiéndose el *segundo de efemérides* como la 31556925,97474 parte del año trópico para 1900 enero 0 a 12 horas de tiempo de efemérides.

Aunque esta escala de tiempo es bastante uniforme, en la actualidad y gracias al desarrollo de relojes atómicos, que básicamente están constituidos por un circuito eléctrico oscilante cuya frecuencia viene regulada por vibraciones internas, de origen cuántico, de átomos que proporcionan una serie continua de impulsos eléctricos, separados por un cierto intervalo más o menos grande; y que, mantenidos de forma ininterrumpida, establecen una escala de tiempo física denominada *escala de tiempo atómico*, sin más que contar unidades a partir de un instante origen elegido arbitrariamente.

La unidad de esta escala es el *segundo atómico* que se define como la duración de 9192631770 períodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133. Esta escala presenta la gran ventaja de su accesibilidad inmediata.

7.2. Tiempo rotacional

Definición 7.1 *Una escala de tiempo rotacional es una escala astronómica basada en el movimiento de rotación de la Tierra, cuyo origen es el instante de paso de un determinado punto de la esfera celeste por el meridiano superior del lugar de observación, y cuya unidad es el día, o intervalo de tiempo transcurrido entre dos culminaciones superiores de dicho punto.*

Para determinar mediante observaciones astronómicas una escala de tiempo rotacional, habría que medir el movimiento angular del meridiano local del observador con respecto a un punto fijo sobre la esfera celeste. Pero la no existencia de un punto fijo en el Universo hace que el punto que se elija sea cuanto menos accesible, fácilmente observable y que esté bien definido sobre la esfera celeste. Independientemente del punto de la esfera celeste que se elija, siempre es la Tierra en rotación la que sirve como reloj astronómico del tiempo rotacional.

En este sentido, si el punto elegido es el punto Aries entonces tendremos una escala de tiempo denominada *tiempo sidéreo*, y si eligiéramos el Sol, tendríamos *tiempo solar*. Consecuentemente:

Definición 7.2 *Se define el día sidéreo como el intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del punto Aries por el meridiano superior del lugar; y el día solar como el intervalo de tiempo transcurrido entre dos culminaciones superiores sucesivas del Sol por el lugar de observación.*

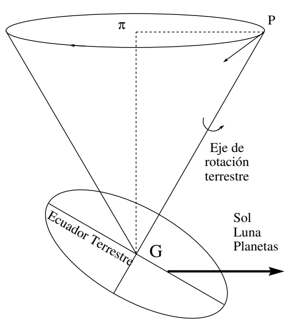


Figura 7.2: Movimiento del eje de rotación terrestre alrededor del eje de la eclíptica

Entre otros fenómenos, la precesión y la nutación hacen que estas escalas no sean uniformes, por lo que habrá que buscar recursos que garanticen en la mayor medida posible la uniformidad de estas escalas. Independientemente de que en el último capítulo se traten con mayor profundidad a continuación se indican brevemente los aspectos básicos de estos fenómenos que afectan directamente a la medida del tiempo.

Debido al abultamiento ecuatorial de la Tierra, las fuerzas externas que actúan sobre la Tierra en rotación producen un desplazamiento en sentido retrógrado del eje terrestre, generando una variación de los planos fundamentales que definen los sistemas ecuatorial y eclíptico.

En el movimiento del eje de rotación terrestre se distinguen dos movimientos superpuestos: uno de largo período que sin pérdida de generalidad puede achacarse a la acción gravitatoria conjunta del Sol y de la Luna y otro de corto período debido aunque no de forma exclusiva a la acción de los planetas. Estos movimientos se denominan precesión y la nutación, respectivamente.

La precesión se manifiesta en la variación del plano del ecuador terrestre y la nutación en la variación del plano de la eclíptica. Estas variaciones suponen que la posición del punto Aries también varíe como consecuencia de ser la intersección del ecuador celeste y de la eclíptica.

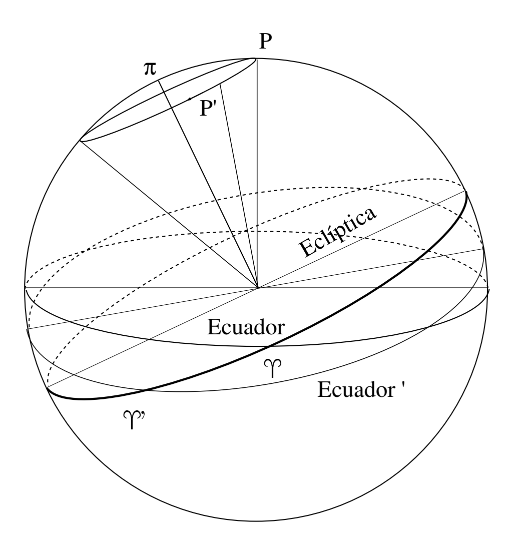


Figura 7.3: Precesión lunisolar

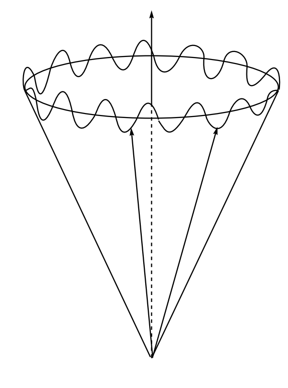


Figura 7.4: Nutación

La precesión lunisolar produce un movimiento del ecuador terrestre de carácter secular que arrastra al eje de rotación y, consecuentemente, el eje celeste describe un cono alrededor del eje de la eclíptica en sentido retrógrado con período de 26000 años. Debido a este fenómeno, el punto Aries tiene un movimiento retrógrado sobre la eclíptica de 50”2909 por año.

Asímismo, podemos definir como *ecuador medio* a la intersección del plano que contiene al ecuador terrestre en un determinado instante con la esfera celeste, y *eje celeste medio* a la dirección perpendicular por el centro de la esfera celeste al ecuador medio. La intersección del eje medio con la esfera celeste serán los *polos norte y sur medios*. A las coordenadas absolutas referidas a un ecuador y

eje celeste medios se denominan *coordenadas absolutas medias*.

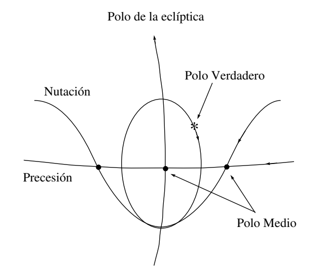


Figura 7.5: Polos celestes medio y verdadero

Por otra parte, el eje de rotación terrestre tiene, además del movimiento de precesión otro movimiento, la nutación, de corto período superpuesto al anterior que es el que produce la variación de la oblicuidad de la eclíptica.

Este movimiento tiene un período de 18.66 años haciendo que el polo celeste describa una elipse, denominada *elipse de nutación*, en sentido retrógrado cuyo centro –polo medio– es el que recorre el círculo de precesión alrededor del eje de la eclíptica. El eje mayor de esta elipse está en la dirección del polo de la eclíptica y su valor es 18"4 y el eje menor está sobre el círculo de precesión valiendo 13"7. Al valor del semieje mayor, 9"21, se le denomina constante de nutación.

Finalmente, definiremos como *eje terrestre verdadero* al eje de rotación terrestre afectado de precesión y nutación, como *eje celeste verdadero* al eje terrestre verdadero prolongado hasta la esfera celeste, como *polo verdadero* a la intersección del eje celeste verdadero con la esfera celeste, como *ecuador verdadero* al plano perpendicular al eje celeste verdadero por el centro de la esfera celeste, como *equinoccio verdadero* a la intersección de la eclíptica media y el ecuador verdadero; y, consecuentemente, se denominan *coordenadas verdaderas* de un astro a las coordenadas astronómicas referidas al equinoccio y al ecuador verdaderos.

La composición de la precesión y la nutación hacen describir al polo verdadero una línea sinuosa entorno al polo medio de la eclíptica.

7.2.1. Tiempo sidéreo

Entre los puntos de referencia bien definidos sobre la esfera celeste destaca el punto Aries, que como ya sabemos está determinado por la intersección de la eclíptica con el ecuador celeste en cada instante. Cualquier observador puede medir directamente el movimiento angular del meridiano local respecto al punto Aries sin más que observar el paso por el meridiano de estrellas de ascensión recta conocida, ya que en este instante la ascensión recta es igual al ángulo horario del punto Aries. La precisión con que puede determinarse en la práctica el ángulo horario del punto Aries es muy grande, observando con un *círculo meridiano* el paso por el meridiano de estrellas fundamentales de ascensiones rectas conocidas con gran exactitud. De este modo, podemos definir:

Definición 7.3 *Se denomina tiempo sidéreo al tiempo definido implícitamente por el movimiento en ángulo horario del punto Aries respecto al meridiano local.*

Sin embargo, el equinoccio es un punto móvil sobre la esfera celeste en cuanto que está afectado por la precesión y la nutación. En temas anteriores habíamos definido el equinoccio medio como el equinoccio correspondiente a un instante determinado corregido por precesión y el equinoccio verdadero como el equinoccio medio corregido por nutación. De este modo, según se mida el ángulo horario del equinoccio medio o del equinoccio verdadero tendremos *tiempo sidéreo medio* o *tiempo sidéreo verdadero*. La diferencia entre el tiempo sidéreo verdadero y medio se denomina *ecuación de los equinoccios* (EE) y representa el desplazamiento del

equinoccio sobre el ecuador debido al movimiento de nutación, por lo que también suele denominarse *nutación en ascensión recta*.

En estas escalas las unidades de tiempo son el *día sidéreo medio* y el *día sidéreo verdadero*.

Definición 7.4 *Se denominan día sidéreo verdadero y día sidéreo medio a los intervalos de tiempo transcurridos entre dos pasos sucesivos por el meridiano superior del lugar de los equinoccios verdadero y medio, respectivamente.*

El origen de la escala de tiempo sidéreo medio es la culminación en el meridiano de Greenwich del equinoccio medio correspondiente al día 1900 enero 0. El origen de la escala de tiempo sidéreo verdadero difiere del anterior en el correspondiente valor de la ecuación de los equinoccios.

En ambos casos, los movimientos de estos puntos no son uniformes, por lo que los tiempos sidéreos así definidos tampoco lo serán. En una primera aproximación podemos definir una *escala de tiempo sidéreo uniforme* del modo siguiente: sea Υ_0 la posición del equinoccio medio en un instante de referencia t_0 de la escala de tiempo sidéreo medio y sea Υ_n la posición del equinoccio medio en otro instante t_n. En un instante cualquiera, la posición de un equinoccio moviéndose con movimiento uniforme Υ_U será

$$\Upsilon_U \,=\, \Upsilon_0 \,+\, \Upsilon\,(t_n - t_0)$$

siendo Υ la posición del equinoccio medio en ese instante. De este modo,

Definición 7.5 *Se denomina día sidéreo uniforme al intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del equinoccio uniforme por el meridiano del lugar.*

Esta escala de tiempo sidéreo uniforme se utiliza en observatorios dotados de relojes precisos de tiempo sidéreo. En la vida cotidiana no se utiliza esta escala de tiempo pues hay épocas del año en que a las 0^h de tiempo sidéreo es de día y otras en que a esa misma hora es de noche. Así, por ejemplo, el mediodía del 21 de marzo ocurrirá a las 0^h de tiempo sidéreo, el 21 de junio a las 6^h de tiempo sidéreo, el 21 de septiembre a las 12^h de tiempo sidéreo y el 21 de diciembre a las 18^h de tiempo sidéreo.

7.2.2. Tiempo verdadero y tiempo medio

Considerando el movimiento diurno del Sol como fenómeno astronómico de referencia podemos construir otras escalas de tiempo rotacionales.

Definición 7.6 *Se denomina tiempo solar verdadero o simplemente tiempo verdadero al ángulo horario del centro del Sol verdadero, y se llama día verdadero al intervalo de tiempo transcurrido entre dos culminaciones superiores consecutivas del centro del Sol verdadero por el meridiano del lugar.*

El tiempo verdadero es por tanto una escala de tiempo local que queda definida por el movimiento en ángulo horario $H_\odot$ del centro del Sol verdadero. De la

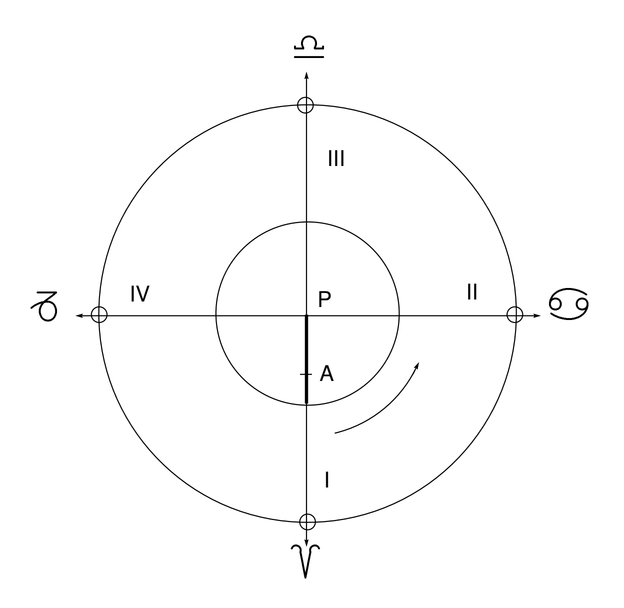


Figura 7.6: Tiempo sidéreo y movimiento anual del Sol

relación fundamental de la Astronomía de Posición tenemos que

$$H_{\odot} = \theta - \alpha_{\odot},$$

siendo θ el tiempo sidéreo verdadero u hora sidérea verdadera y $\alpha_{\odot}$ la ascensión recta del Sol verdadero ese día. La no uniformidad de la escala de tiempo sidéreo verdadero implica que el tiempo solar verdadero no es uniforme. Incluso aproximando el tiempo sidéreo verdadero por el tiempo sidéreo uniforme, el tiempo solar verdadero tampoco será uniforme debido a las irregularidades que presenta la ascensión recta del Sol.

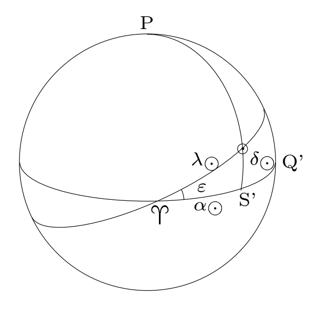


Figura 7.7

Para analizar esta última cuestión, consideremos una posición cualquiera del Sol sobre la eclíptica tal que $(\alpha_{\odot}, \delta_{\odot})$ son las coordenadas absolutas del Sol verdadero y $(\lambda_{\odot}, 0)$ sus coordenadas eclípticas. A efectos de representación, y sin pérdida de generalidad, hemos elegido una posición del Sol entre Aries y Cáncer.

El triángulo de posición está determinado por el Sol verdadero $\odot_V$, el punto Aries Υ, y el punto intersección del meridiano celeste que pasa por el Sol verdadero con el ecuador celeste S'. En este triángulo, el ángulo de vértice Υ es la oblicuidad de la eclíptica ε, el ángulo de vértice S' es rectángulo, el lado $\odot_V S'$ es la declinación del Sol verdadero $\delta_{\odot}$, el lado $\Upsilon S'$ es la ascensión recta $\alpha_{\odot}$ y el lado $\lambda_{\odot}$, la longitud eclíptica del Sol.

Aplicando la regla de Neper a este triángulo esférico rectángulo se obtiene

$$\tan\alpha_\odot = \tan\lambda_\odot \cos\varepsilon, \ \text{ y } \ \frac{\cos\alpha_\odot}{\cos\lambda_\odot} = \frac{1}{\cos\delta_\odot}. \tag{26}$$

Para estudiar la variación de la ascensión recta, diferenciando en la primera de estas expresiones tendremos que

$$\frac{d\alpha_\odot}{\cos^2\alpha_\odot} = \frac{d\lambda_\odot}{\cos^2\lambda_\odot}\cos\varepsilon \Rightarrow d\alpha_\odot = \cos\varepsilon\left(\frac{\cos\alpha_\odot}{\cos\lambda_\odot}\right)^2 d\lambda_\odot. \tag{27}$$

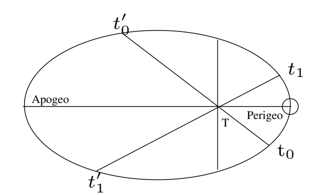


Figura 7.8: Movimiento del Sol verdadero

Sustituyendo en esta expresión la ecuación (26),

$$d\alpha_\odot = \frac{\cos\varepsilon}{\cos^2\delta_\odot}\, d\lambda_\odot. \tag{28}$$

Según la 2ª ley de Kepler, el Sol, en su movimiento orbital aparente alrededor de la Tierra, barre áreas iguales en tiempos iguales, y puesto que según la 1ª ley de Kepler dicha órbita es elíptica, resulta que su velocidad orbital es mayor en el perigeo que en el apogeo y, consecuentemente, será un movimiento no uniforme. Este hecho supone que la longitud eclíptica del Sol $\lambda_\odot$ varía de forma no uniforme y por tanto, la variación de la ascensión recta del Sol verdadero no será uniforme.

No obstante, podríamos plantearnos si esta variación no uniforme de la longitud eclíptica del Sol se compensaría de algún modo al efectuar las correspondientes proyecciones sobre el ecuador, de forma que la variación de la ascensión recta fuese constante.

La variación $d\lambda_\odot$ por unidad de tiempo es máxima en el perigeo y mínima en el apogeo, mientras que $\cos^2\delta_\odot$ es máximo para $\alpha_\odot$ igual a 0^h y 12^h y mínimo para $\alpha_\odot$ igual a 6^h y 18^h; esto es, es máximo cuando el Sol está en los equinoccios y mínimo cuando está en los solsticios. Puesto que estos máximos o mínimos no coinciden respecto de la posición del Sol sobre la eclíptica, el valor de $d\lambda_\odot$ no varía ni proporcionalmente ni en el mismo sentido que $\cos^2\delta_\odot$ y por tanto, la variación $d\alpha_\odot$ por unidad de tiempo no es constante. Luego la ascensión recta varía de forma no uniforme y consecuentemente, el tiempo solar verdadero no nos sirve como escala de tiempo uniforme.

La determinación del inicio del día solar verdadero puede obtenerse mediante observaciones directas del ángulo horario del Sol realizadas con un Círculo Meridiano. La falta de uniformidad del tiempo verdadero hace que éste no se pueda materializar mediante relojes artificiales.

Para construir una escala de tiempo uniforme basada en el movimiento diurno del Sol definimos el siguiente punto sobre la esfera celeste:

Definición 7.7 *Se denomina Sol ficticio ($\odot_F$) a un "Sol" que se mueve sobre la eclíptica con velocidad constante y coincidente con el Sol verdadero en el perigeo y en el apogeo.*

La velocidad contante del Sol ficticio sobre la eclíptica hace que en el recorrido desde el apogeo hasta el perigeo vaya adelantado respecto al Sol verdadero y en el recorrido desde el perigeo hasta el apogeo vaya retrasado. Procediendo de forma idéntica al caso anterior obtenemos que

$$d\alpha_{\odot_F} \;=\; f\,(d\lambda_{\odot_F}, \delta_{\odot_F}).$$

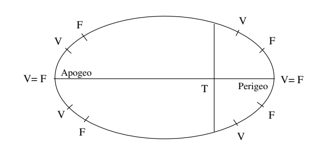


Figura 7.9: Sol verdadero y Sol ficticio

Obviamente, la variación $d\lambda_{\odot_F}$ por unidad de tiempo es constante; pero $\delta_{\odot_F}$ variará entre $-\varepsilon$ y $+\varepsilon$ y, puesto que la oblicuidad de la eclíptica está afectada por nutación, la declinación del Sol ficticio variará de forma no uniforme. Así, pues, el Sol ficticio tampoco nos servirá para establecer una escala de tiempo uniforme.

Definición 7.8 *Se denomina Sol medio ($\odot_M$) a un "Sol" que se mueve sobre el ecuador celeste con movimiento constante que coincide con el Sol ficticio en los equinoccios, y verificando además que $\lambda_{\odot_F} = \alpha_{\odot_M}$.*

Mediante esta secuencia de definiciones hemos obtenido un Sol ideal que sí está dotado de movimiento uniforme, de manera que en el fondo lo que hemos hecho ha sido eliminar del Sol verdadero. El movimiento diurno del Sol medio nos permite establecer una escala de tiempo solar uniforme que se denomina *tiempo solar medio* o simplemente *tiempo medio* que equivale al ángulo horario del Sol medio y cuya unidad es el *día medio*.

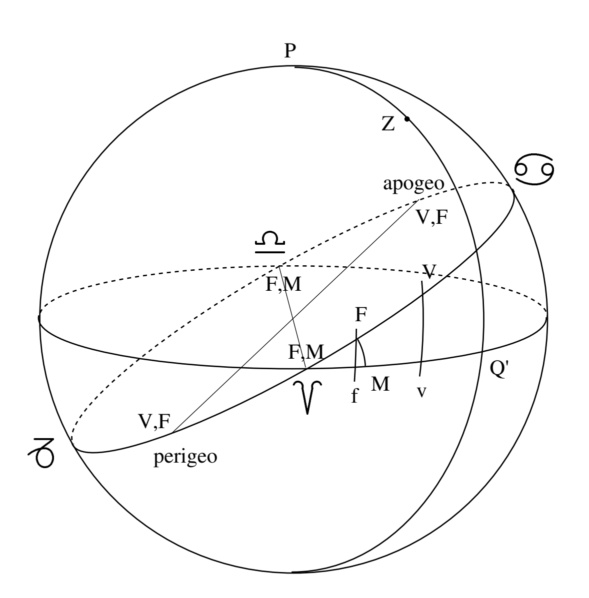


Figura 7.10: Sol verdadero, Sol ficticio y Sol medio

Definición 7.9 *Se llama día medio al intervalo de tiempo transcurrido entre dos*

pasos consecutivos del Sol medio por el meridiano superior del lugar de observación.

Definición 7.10 *Se denomina* ecuación de tiempo (E_t) *a la suma algebraica de todas las correcciones que es necesario aplicar al tiempo verdadero para obtener el tiempo medio, es decir*

$$E_t = TM - TV = H_{\odot_M} - H_{\odot_V}.$$

Definición 7.11 *Se denomina* ecuación de centro (Q) *a la corrección que hay que hacer a la longitud eclíptica del Sol ficticio para obtener la longitud eclíptica del centro del Sol verdadero y se denomina* reducción al ecuador (R) *a la corrección que hay que aplicar a la longitud eclíptica del Sol verdadero para obtener la ascensión recta del Sol verdadero. Es decir,*

$$Q = \lambda_{\odot_V} - \lambda_{\odot_F}, \qquad R = \lambda_{\odot_V} - \alpha_{\odot_V}.$$

Proposición 7.1 *La ecuación de tiempo es la diferencia entre la ecuación de centro y la reducción al ecuador, esto es,*

$$E_t = Q - R.$$

Demostración. Consideremos, sin pérdida de generalidad, una posición cualquiera del Sol verdadero V entre los puntos Aries y Cáncer. En esta situación, la longitud eclíptica del Sol verdadero $(\lambda_{\odot_V})$ es mayor que la longitud eclíptica $(\lambda_{\odot_F})$ del Sol ficticio F.

Sean f y v los puntos intersección del ecuador celeste con los meridianos celestes que pasan por el Sol ficticio y por el Sol verdadero, respectivamente. El Sol medio $\odot_M$ estará situado sobre un punto M del ecuador celeste de forma que $\alpha_{\odot_M} = \lambda_{\odot_F}$. Sea Q' el punto intersección del meridiano superior de un determinado lugar A con el ecuador celeste.

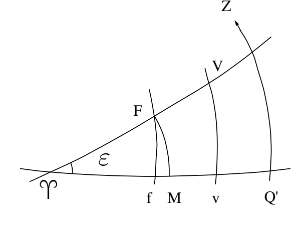
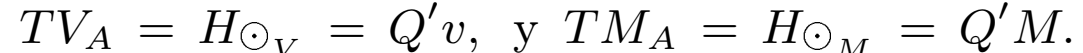


Figura 7.11

Las horas verdadera y media en el lugar de observación serán, por definición, los ángulos horarios del Sol verdadero y del Sol medio, esto es:



$$TV_A = H_{\odot_V} = Q'v, \text{ y } TM_A = H_{\odot_M} = Q'M.$$

Como la hora sidérea es el ángulo horario del punto Aries, tendremos que

$$\theta_A = H_\Upsilon = \alpha_{\odot_M} + H_{\odot_M}, \text{ y } \theta_A = H_\Upsilon = \alpha_{\odot_V} + H_{\odot_V}.$$

Restando ambas expresiones se obtiene

$$0 = \alpha_{\odot_V} - \alpha_{\odot_M} + H_{\odot_V} - H_{\odot_M} \Rightarrow \alpha_{\odot_V} - \alpha_{\odot_M} = H_{\odot_M} - H_{\odot_V}.$$

Y, consecuentemente,

$$E_t = \alpha_{\odot_V} - \alpha_{\odot_M} = vM.$$

Por tanto, $E_t = \Upsilon v - \Upsilon M = \Upsilon v - \Upsilon M \pm \Upsilon V$.

Puesto que la longitud eclíptica del Sol ficticio es igual a la ascensión recta del Sol medio se tiene que $\Upsilon M = \Upsilon F$, y entonces

$$\begin{aligned} E_t = & \ \Upsilon v - \Upsilon F \pm \Upsilon V(\Upsilon V - \Upsilon F) - (\Upsilon V - \Upsilon v) \\ = & \ (\lambda_{\odot_V} - \lambda_{\odot_F}) - (\lambda_{\odot_V} - \alpha_{\odot_V}) = Q - R \end{aligned}$$

El tiempo medio puede determinarse básicamente de dos formas distintas: utilizando la ecuación de tiempo o a partir del tiempo sidéreo. La primera de ellas consiste en observar el ángulo horario del Sol verdadero, tiempo verdadero, y aplicar los valores de la ecuación de tiempo que se encuentran tabulados, en función de los elementos orbitales del Sol verdadero, y publicados en los almanaques astronómicos anuales.

En segundo lugar, se puede utilizar la expresión $H_{\odot_M} = \theta - \alpha_{\odot_M}$, donde $\alpha_{\odot_M}$ es la ascensión recta del Sol medio referida al equinoccio medio del instante considerado y que viene dada por la siguiente fórmula establecida por Newcomb:

$$\alpha_{\odot_M} = 18^h 38^m 45^s 836 + 8640184^s 542\, T + 0^s 0929\, T^2,$$

siendo T el número de siglos julianos de 36525 días medios transcurridos desde 1900 enero 0 en Greenwich a mediodía medio. Como veremos posteriormente, el *día juliano* es la unidad de la escala de tiempo conocida como *período juliano*. Esta escala consiste en la numeración correlativa de los días solares medios, empezando por el 0, a partir del mediodía medio de Greenwich el día 1 de enero del año 4713 antes de Cristo. Puesto que el día 1900 enero 0 en Greenwich a mediodía medio es el día juliano 2415020.0, entonces

$$T = \frac{FJ - 2415020{,}0}{36525},$$

donde FJ es el día juliano correspondiente. Las escalas de tiempo sidéreo, verdadero y medio son escalas locales pues en todas ellas hemos definido el tiempo como el ángulo horario del punto Aries, del Sol verdadero y del Sol medio, respectivamente, y por tanto dependerán del meridiano del lugar de observación.

De aquí deducimos que en lugares de la superficie terrestre pertenecientes a distintos meridianos los tiempos sidéreos, verdaderos o medios serán distintos.

Recordando que la *longitud geográfica* de un lugar es el ángulo central que subtiende el arco del ecuador comprendido entre el meridiano de Greenwich y el meridiano del lugar, entonces la diferencia entre los tiempos sidéreos correspondientes a dos lugares distintos será igual a la diferencia de longitudes geográficas entre ambos.

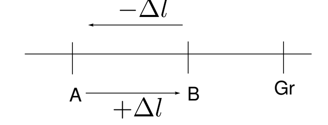


Figura 7.13

De este modo, para calcular la hora sidérea, verdadera o media en un determinado lugar sabiendo la que es en otro, bastará conocer la diferencia de longitudes existente entre ellos. Esta diferencia se sumará o restará a la hora del lugar conocido según el segundo lugar esté al este o al oeste del anterior, respectivamente.

Podemos concluir diciendo que:

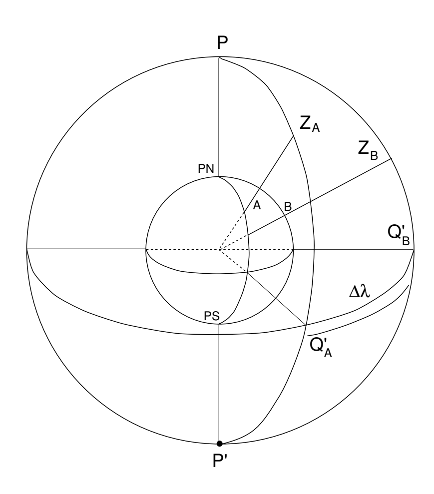


Figura 7.12:

Corolario 7.1 *Para realizar un cambio de tiempo en una misma escala de un lugar A a otro lugar B bastará con sumar o restar la diferencia de longitudes $\Delta\lambda$ entre ambos según que el lugar B esté al este o al oeste de A, respectivamente.*

7.2.3. Tiempo civil, tiempo oficial y tiempo universal

Como acabamos de ver, el origen del día medio ocurre en el instante en que el Sol medio está en su culminación superior. Esto supone que si adoptamos para la vida cotidiana el tiempo medio hay que cambiar de fecha a mediodía medio. Por comodidad, nos interesa que el cambio de fecha ocurra cuando el Sol medio esté en el meridiano inferior, es decir, en la medianoche media, que es precisamente cuando la actividad humana disminuye. Para ello establecemos una nueva escala de tiempo rotacional: el tiempo civil.

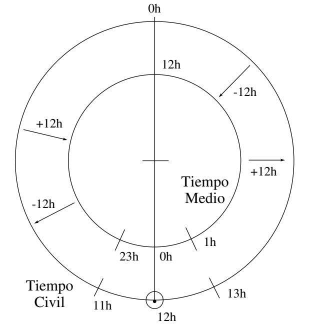


Figura 7.14: Tiempo civil y tiempo medio

Definición 7.12 *Se denomina tiempo civil al tiempo medio aumentado o disminuido según que el tiempo medio sea, respectivamente, menor o mayor que doce horas, esto es,*

$$TC = TM \pm 12^h.$$

Teniendo en cuenta que el origen de la escala de tiempo medio coincide con el mediodía medio de 1900 enero 0, resulta que en el tránsito del Sol medio desde el meridiano inferior de un lugar hasta el meridiano superior, las fechas media y civil coinciden, mientras que cuando el Sol medio está entre el meridiano superior y el meridiano inferior la fecha media es igual a la fecha civil más uno.

Así, cuando el Sol medio está en su culminación superior comienza un nuevo día medio, siendo por tanto las $12^h\,TC$ del día civil anterior, y cuando el Sol medio está en su culminación inferior son las $12^h\,TM$, que es el comienzo del día civil correspondiente a la fecha media en curso.

Puesto que el tiempo civil es el tiempo medio desplazado 12^h también es una escala de tiempo local. Así, la diferencia entre el tiempo civil de dos lugares será igual a la diferencia entre las longitudes de ambos.

Tanto en este caso como en los anteriores, este hecho constituye el fundamento del problema de la *determinación de longitudes geográficas*: para determinar la diferencia de longitudes geográficas entre dos lugares basta comparar simultáneamente los tiempos locales solares o sidéreos correspondientes. Por ejemplo, en Navegación, se determina la longitud de un barco comparando el tiempo local en Greenwich, mantenido con cronómetros de precisión, con el tiempo local de la posición del barco, que se puede determinar mediante observaciones de fenómenos astronómicos, como pueden ser eclipses de Sol, de Luna o de los satélites de Júpiter y ocultaciones de estrellas por la Luna.

Para evitar el cambio de hora civil cuando nos desplazamos, cambiando de longitud, dentro de una zona de la Tierra, cada país eligió arbitrariamente un meridiano particular de su territorio, que actúa de referencia para el tiempo civil en todo el país. Así, por ejemplo, en España se adoptó el meridiano de Madrid y en Francia el meridiano de París. De este modo se resuelve el problema de tener un tiempo uniforme y único en cada país, pero seguía subsistiendo cuando se pasaba de un país a otro o en países muy extensos.

Con objeto de universalizar y uniformar el tiempo a escala mundial, en la Convención de Washington (1884) se propuso, y definitivamente se aceptó en la Conferencia Internacional de la Hora de París (1912), el meridiano de Greenwich como meridiano internacional u origen de longitudes y además se estableció el sistema de los husos horarios.

Definición 7.13 *Se denomina* huso horario *a cada una de las* 24 *partes en que se divide la superficie de la Tierra, cuya amplitud en longitud es* 15° *o* 1^h*, y numerados de* 0 *a* 23 *hacia el este a partir del huso que tiene al meridiano de Greenwich como meridiano central, denominado* huso horario 0*, y que se extiende entre las longitudes* $+7^o5 = 0^h30^mE$ *y* $-7^o5 = 0^h30^mW$.

A partir de esta división arbitraria de la Tierra definimos una nueva escala de tiempo: el tiempo oficial.

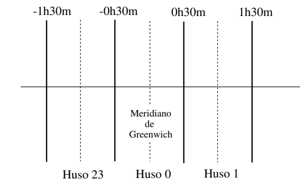


Figura 7.15: Husos horarios

Definición 7.14 *Se llama* tiempo oficial *de un lugar al tiempo civil del meridiano central del huso horario al cual pertenece.*

Ahora para cambiar de hora oficial entre dos lugares bastará sumar o restar según el criterio anterior, el número entero equivalente a la diferencia entre los husos horarios a los cuales pertenecen. Así, en las Islas Canarias el tiempo oficial es una hora menos que en la España peninsular.

Asimismo, para solucionar la dificultad del cambio de fecha cuando se viaja alrededor de la Tierra se adopta el antimeridiano de Greenwich como la *línea de cambio de fecha* de forma que si cruzamos este meridiano de este a oeste se añade una unidad a la fecha del día y si se cruza de oeste a este se resta igualmente una

unidad.

Por razones prácticas, algunos países adoptan el tiempo oficial según intereses convencionales y se establece el *tiempo legal* que difiere en un número entero de la hora oficial. Por ejemplo, en España se establecen tiempos legales diferentes en invierno y en verano, cuyas diferencias con el tiempo oficial son 1 y 2 horas, respectivamente.

A pesar de estas mejoras, estas escalas siguen siendo locales y como nos interesa datar no sólo los fenómenos astronómicos sino también otros acontecimientos de la vida cotidiana -vuelos aéreos, comunicaciones por satélite, etc.- respecto a un tiempo que sea único para cualquier lugar de la Tierra, establecemos la siguiente definición:

Definición 7.15 *Se denomina* tiempo universal *(TU) al tiempo civil de Greenwich, o también es el tiempo solar medio correspondiente al meridiano de Greenwich aumentado en doce horas.*

Debido a las variaciones seculares de la precesión y a que la rotación de la Tierra no es constante, el tiempo universal, al igual que el tiempo solar medio, tampoco es exactamente uniforme por lo que es preciso corregirlo de estas irregularidades.

Definición 7.16 *Actualmente, se definen varias clases de tiempo universal según sean las correcciones aplicadas al mismo. Así:*

- *TU0: Es el tiempo universal determinado en un observatorio a partir del tiempo sidéreo obtenido mediante observaciones de estrellas fundamentales, generalmente a su paso por el meridiano. Estas observaciones permiten corregir los errores de los relojes de tiempo sidéreo, y teniendo en cuenta la diferencia de longitudes entre dicho observatorio y el de Greenwich, se obtiene el tiempo sidéreo en Greenwich, para posteriormente obtener el tiempo civil en Greenwich o tiempo universal. Se designa por* $TU0_i$ *donde el subíndice i indica el observatorio donde ha sido determinado.*

- *TU1: Es el tiempo universal* $TU0$ *corregido por el movimiento del polo. La corrección viene dada por*

$$\Delta\lambda^s = TU1 - TU0 = \frac{1^s}{15''}(x \operatorname{sen} \lambda - y \cos \lambda) \tan \phi$$

  donde λ *y* ϕ *son la longitud geográfica contada hacia el oeste y latitud geográfica del lugar de observación, y* (x, y) *son las coordenadas rectangulares del polo instantáneo en segundos de arco referidas al polo medio. Estos valores se publican periódicamente en las circulares del Bureau International de l'Heure (BIH) de París.*

- *TU2: Es el tiempo universal* $TU1$ *corregido de las irregularidades periódicas del movimiento de rotación terrestre. El valor de esta corrección* $\Delta T = TU2 - TU1$ *se encuentra en las Efemérides Astronómicas publicadas por el Real Instituto y Observatorio de la Armada de San Fernando.*

- *TU2 definitivo: Es el tiempo universal obtenido como promedio del tiempo universal $TU2$ hallado por todos los observatorios que contribuyen a su determinación. Este tiempo es casi uniforme pues está afectado por las variaciones seculares del movimiento de rotación terrestre.*

7.3. Tiempo de efemérides

Para evitar introducir las irregularidades de la rotación terrestre en la determinación del tiempo t se establecen escalas de tiempo basadas en la traslación de la Tierra alrededor del Sol, que se traduce para un observador terrestre en un movimiento aparente del Sol alrededor de la Tierra.

En general, al estudiar el movimiento de un cuerpo cualquiera podemos expresar sus coordenadas, su velocidad y su aceleración en función de la variable t mediante las ecuaciones diferenciales del movimiento. Integrando estas ecuaciones se obtienen explícitamente las coordenadas en función de la variable tiempo y de las constantes de integración, que se pueden obtener a partir de condiciones iniciales observadas. Sin embargo, la integración de las ecuaciones dinámicas sólo se puede efectuar en términos finitos en pocos casos particulares, por lo que se recurre a desarrollos en serie; así, una coordenada cualquiera C se obtendrá mediante un desarrollo en serie en potencias de t de la forma

$$C = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots,$$

en donde los coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3, ... dependen de las constantes de integración y cuyo valor numérico solamente se pueden determinar mediante observaciones. Determinados los coeficientes, la expresión anterior sirve a su vez para definir y determinar la variable t; basta para ello sustituir en esta ecuación el valor de C obtenido de las observaciones y resolver dicha ecuación.

Esta ecuación, que proporciona las coordenadas de un astro en función de la variable tiempo, se conoce con el nombre de *efemérides* del astro. El establecimiento teórico de unas efemérides mediante integración de las ecuaciones del movimiento es un problema propio de la Mecánica Celeste.

Volviendo al movimiento aparente del Sol, lo que realmente utilizaremos para establecer esta escala de tiempo es el movimiento del Sol en longitud eclíptica. Integrando las ecuaciones diferenciales del movimiento del Sol, la longitud eclíptica del Sol admite un desarrollo en serie de la forma

$$\lambda_\odot = \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \lambda_3 t^3 + \ldots$$

Los términos en potencias superiores a la segunda representan oscilaciones periódicas de la longitud. Suprimiendo los términos periódicos se obtiene la longitud eclíptica media del Sol

$$\lambda_{\odot_M} = \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2,$$

en donde el término en t^2 se debe al movimiento de precesión del punto *Aries*. Una vez obtenidos los coeficientes λ_0, λ_1 y λ_2, las efemérides dadas por esta ecuación determinan una escala de tiempo definida por:

Definición 7.17 *Se denomina tiempo de efemérides a la variable independiente t que interviene en la ecuación que proporciona la longitud eclíptica media del Sol obtenida mediante la resolución del modelo dinámico del movimiento del Sol y que viene dada por*

$$\lambda_{\odot_M} = \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2,$$

donde los coeficientes λ_0, λ_1 y λ_2 dependen de las constantes de integración y cuyo valor numérico solamente se puede determinar mediante observaciones astronómicas.

Así pues, para determinar el tiempo de efemérides basta medir la longitud eclíptica aparente del Sol mediante observaciones astronómicas, corregirla de los términos periódicos para obtener la longitud eclíptica media, sustituir este valor en la última expresión y resolver la ecuación obtenida para determinar el tiempo de efemérides.

Newcomb, utilizando observaciones del Sol realizadas desde 1680 a 1895, calculó los valores de estas constantes de integración obteniendo

$$\lambda_{\odot_M} = 279^{\rm o}41'48''04 + 129602768''13\, t + 1''089\, t^2, \qquad (29)$$

donde t se cuenta en siglos julianos de 36525 días solares medios. Newcomb, desconociendo las irregularidades de la rotación terrestre, supuso que este tiempo era uniforme. Ahora bien, las observaciones posteriores realizadas en tiempo solar medio de la escala de tiempo universal mostraron que esta ecuación no proporcionaba las longitudes eclípticas medias observadas del Sol.

Posteriormente, Jones obtuvo la expresión de la corrección que hay que aplicar a la fórmula de Newcomb cuando las observaciones se realizan en tiempo universal

$$\Delta\lambda_{\odot_M} = +1''00 + 2''97\, T + 1''23\, T^2,$$

donde T es el tiempo universal contado en siglos julianos de 36525 días medios a partir 1900 enero 0 a mediodía medio de Greenwich.

Esta corrección nos indica que las posiciones observadas del Sol se adelantan respecto a las posiciones calculadas teóricamente para las efemérides. Esto significa que el tiempo universal basado en la rotación terrestre no es uniforme respecto del tiempo de efemérides que aparece como variable independiente en la expresión (29). Tenemos de este modo dos escalas de tiempo diferentes: la escala de tiempo de efemérides definida implícitamente por las efemérides, ecuación (29), y que se utiliza para la teoría dinámica, y la escala de tiempo universal que se emplea en las observaciones.

La discrepancia entre las posiciones teóricas y observadas del Sol se debe al empleo de dos escalas de tiempo distintas, el tiempo de efemérides para la teoría y el tiempo universal para las observaciones.

Para unificar ambas escalas, el procedimiento más fácil consiste en aplicar una corrección ΔT al tiempo universal $TU2$ convirtiéndolo así en tiempo de efemérides. Esta corrección viene dada por

$$\Delta T = TE - TU2 = +24^s349 + 72^s318\,T + 29^s950$$

siendo TE el tiempo de efemérides y T el tiempo universal contado en siglos julianos de 36525 días medios a partir 1900 enero 0 a mediodía medio de Greenwich.

Admitiendo que la necesidad de la corrección $\Delta\lambda_{\odot_M}$ se debe a la falta de uniformidad del tiempo universal $TU2$, se adopta como definición de la escala de tiempo de efemérides TE la relación (29), reduciéndose a ella la escala de tiempo universal $TU2$ mediante la corrección ΔT anterior. Respecto a esta escala de tiempo se datan los fenómenos astronómicos observados y los coeficientes de la fórmula (29) pierden entonces su carácter empírico y se convierten en constantes exactas fijadas convencionalmente. La escala de tiempo de efemérides es la mejor aproximación conocida del tiempo uniforme.

Antes de abordar las cuestiones de unidad y origen de la escala de tiempo de efemérides, establezcamos la siguiente definición:

Definición 7.18 *Se denomina* año sidéreo *al intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol verdadero en su movimiento aparente alrededor de la Tierra por un determinado punto fijo de la eclíptica.*

Se denomina año trópico *al intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol por el punto* Υ*, o también, el intervalo de tiempo necesario para que la longitud eclíptica media del Sol verdadero aumente 360º.*

Se denomina año anomalístico *al intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol verdadero por el perigeo de su órbita aparente.*

Se denomina año ficticio o de Bessel *al intervalo de tiempo empleado por el Sol medio en dar una vuelta completa al ecuador celeste a partir del punto origen, que es la posición en que su ascensión recta, afectada de aberración y contada desde el equinoccio medio de la época, es igual a* $18^h40^m = 280^o$.

Debido a la precesión, el equinoccio medio retrograda $50''29$ por año respecto a un equinoccio fijo y por ello el año trópico es más corto que el año sidéreo. Asimismo, el año anomalístico dura más que el año sidéreo pues debido al movimiento de la línea de los ápsides de la órbita solar, el perigeo tiene un movimiento directo de $11''64$ por año respecto a un equinoccio fijo. El año ficticio dura 0^s0014 menos que la del año trópico.

Proposición 7.2 *Si denominamos* A_T, $A_\odot$ *y* A_A *a las duraciones respectivas de los años trópico, sidéreo y anomalístico, entonces se verifica:*

$$\frac{A_T}{360^o - 50''29} = \frac{A_\odot}{360^o} = \frac{A_A}{360^o + 11''64}.$$

Determinando el número de días medios observados que separan dos equinoccios

muy alejados, Newcomb obtuvo que la duración del año trópico 1900 es 365,242199 días medios. Sustituyendo este valor en la expresión anterior se obtiene que el año anomalístico es 365,259641 días medios y la del año sidéreo es 365,256360 días medios. La variación secular de la precesión en ascensión recta hace que el año trópico disminuya 0^s53 por siglo y los años sidéreo y anomalístico aumentan su duración a razón de 0^s01 y 0^s26 por siglo, respectivamente.

A partir de estos conceptos podemos adoptar el segundo de efemérides como la unidad de la escala de tiempo de efemérides, determinado por la fracción del año trópico, que hemos definido como el tiempo necesario para que la longitud eclíptica del Sol aumente 360°. La variación secular de la precesión hace necesario elegir un año trópico determinado de forma que por subdivisión podamos definir una unidad de tiempo constante. El Comité Internacional de Pesos y Medidas estableció en 1956 la siguiente definición:

Definición 7.19 *El segundo de efemérides es la fracción* 1/31556925,97474 *del año trópico 1900.*

El *origen* de la escala de tiempo de efemérides se fija para el valor del tiempo de efemérides $t = 0$, que es cuando $\lambda_{\odot_M} = \lambda_0 = 279^o 41' 48'' 04$. Esta época se designa como 1900 enero 0 a 12^h de tiempo de efemérides. De acuerdo con las observaciones, en este instante, existe una diferencia de 4^s con respecto a las 12^h de tiempo universal.

El *día de efemérides* se define como un intervalo igual a 86400 segundos de efemérides, y la fórmula

$$TE = 0^d 5 + 36525\, t,$$

permite contar el tiempo de efemérides en días de efemérides, siendo t el tiempo en siglos julianos de 36525 días de efemérides contados a partir de 1900 enero 0 a 12^h de TE.

Además de utilizarse para establecer la unidad y el origen de la escala de tiempo de efemérides, el año trópico también se usa para determinar la relación existente entre tiempo medio y tiempo sidéreo.

En el transcurso de un año trópico, la ascensión recta del Sol medio se incrementa de 0° a 360°. Puesto que un año trópico tiene 365,2422 días medios, la variación de la ascensión recta del Sol medio por día medio será

$$\Delta\alpha/\text{día medio} = \frac{360^o}{365{,}2422} = 59' \, 8'' 33.$$

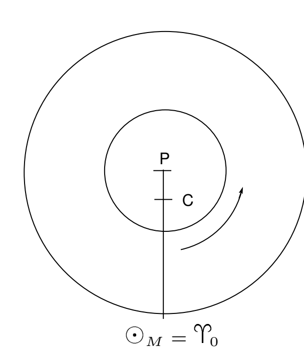
Sea ahora θ_1 el tiempo sidéreo cuando el ángulo horario del Sol medio es H_1 y su ascensión recta es α_1, esto es $\theta_1 = H_1 + \alpha_1$.

Sea θ_2 el tiempo sidéreo un día medio solar después. Entonces el ángulo horario del Sol medio se ha incrementado 360° y la ascensión recta $59' 8'' 33$, o en medida de tiempo, 24^h y $3^m 56^s 55$, respectivamente. Luego

$$\theta_2 = (H_1 + 24^h) + (\alpha_1 + 3^m 56^s 55).$$

De donde $\theta_2 - \theta_1 = 24^h\, 3^m\, 56^s 55$. Pero como $\theta_2 - \theta_1$ es el intervalo de tiempo sidéreo correspondiente a 24^h de tiempo solar medio, entonces

$$24^h \text{ tiempo medio} = 24^h\, 3^m\, 56^s 55 \text{ tiempo sidéreo.}$$



Como un día medio tiene 86636,549 segundos sidéreos y un día sidéreo 86400 segundos sidéreos, la transformación de un intervalo de tiempo medio I_M en su equivalente de tiempo sidéreo $I_\odot$ vendrá dada por

$$I_\odot = \frac{86636{,}549}{86400} I_M = 1{,}0027378\, I_M,$$

y recíprocamente la transformación de un intervalo de tiempo sidéreo en su equivalente de tiempo medio vendrá dada por

$$I_M = \frac{86400}{86636{,}549} I_\odot = 0{,}9972696\, I_\odot.$$

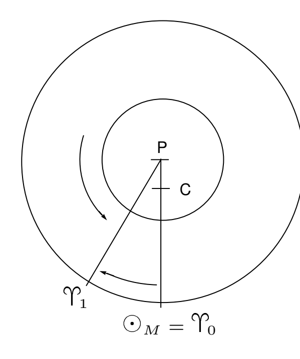


Figura 7.16: Día sidéreo y día solar medio

Aplicando esta última relación se obtiene la equivalencia entre el día sidéreo y el tiempo medio:

$$24^h \text{ sidéreas} = 24 \times 0{,}9972696 = 23^h\, 56^m\, 4^s 09 \text{ tiempo medio.}$$

Como consecuencia del análisis anterior podemos establecer que en un año trópico la Tierra gira alrededor de su eje 365,2422 veces con respecto al Sol medio y una vez más respecto al equinoccio medio.

Para realizar cambios entre horas sidéreas y medias o civiles se necesita saber la hora sidérea a la 0^h de tiempo universal. Este dato está tabulado y permite establecer la posición del punto Υ cuando el Sol medio está en el antimeridiano; es decir, proporciona el ángulo horario del punto Υ respecto al meridiano de Greenwich.

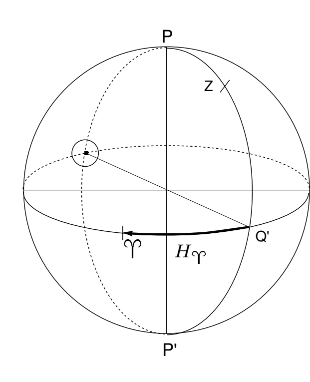


Figura 7.17: Hora sidérea a las 0^h de tiempo universal

Con el fin de universalizar los cambios entre tiempo solar y sidéreo, y entre tiempo solar verdadero y solar medio, existen tabulados los valores de la $\theta_{0^h TU}$ y de la ecuación de tiempo en Greenwich, por lo que es necesario pasar la hora conocida a Greenwich, efectuar el oportuno cambio de hora y posteriormente, mediante la diferencia de longitudes, pasar la hora calculada en Greenwich al lugar en que se quería conocer la nueva hora.

Aunque, como acabamos de decir, la hora sidérea a 0^h de tiempo universal para un determinado día del año es un dato tabulado que aparece en los anuarios astronómicos, también puede calcularse mediante la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \theta_{0^h TU} &= 6^h\, 41^m\, 50^s 54841 + 8640184^s 812866\, T_U \\ &\quad +0^s 093104\, T_U^2 - 6^s 2 \times 10^{-6}\, T_U^3, \end{aligned}$$

donde T_U es el número de siglos julianos de 36525 días de tiempo universal transcurridos desde las $12^h TU$ del 1 de enero del año 2000, es decir:

$$T_U = \frac{FJ - 2451545{,}0}{36525}.$$

Esta relación adaptada al año 1996, por ejemplo, adquiere la expresión

$$\theta_{0^h TU} = 6^h 5967564 + 0^h 0657098244\, d,$$

donde d es el día del año.

7.4. Tiempo atómico

Lejos de desplazar a las escalas de tiempo astronómicas, la introducción del tiempo basado en un fenómeno físico, ordena y precisa los distintos conceptos, facilita el pase de unos a otros y proporciona la base de tiempo material que le es necesaria al astrónomo para sus medidas.

A partir de 1967 se tomó como base fundamental de tiempos la escala de *tiempo atómico*. El tiempo atómico se define y establece a partir de patrones atómicos de frecuencia, denominados *relojes atómicos*, que permiten determinar y reproducir un intervalo de tiempo con precisiones mayores, del orden del nanosegundo, que las existentes hasta entonces y además, su uniformidad es unas mil veces mayor que la del tiempo de efemérides y unas cien mil veces mayor que cualquier escala rotacional. La accesibilidad a la escala de tiempo atómico es prácticamente inmediata, mientras que en las escalas de tiempo astronómico se necesitan largas series de observación para su determinación.

Una escala de tiempo atómico se materializa mediante un patrón de frecuencia de elevada estabilidad, un divisor de frecuencia que proporciona la unidad de tiempo y los dispositivos necesarios para fijar el cero de la escala y mantener la sincronización en tiempo. Dicha escala será, por tanto, el resultado de una integración numérica de la frecuencia patrón. Así,

Definición 7.20 *Se denomina escala local de tiempo atómico (TA) a la integración numérica de la frecuencia de cada patrón atómico.*

Esta definición de tiempo atómico presenta la dificultad de que cada reloj atómico materializa su propia escala de tiempo, y como éstos están sometidos a variaciones del campo gravitatorio originadas por diferencias de latitud y de altura sobre el nivel del mar, así como por variaciones de la atracción del Sol y de otros astros al variar sus posiciones relativas, las diferentes escalas presentan diferencias apreciables.

Para eliminar tales diferencias y obtener una única escala de tiempo atómico, la "Oficina Internacional de Pesos y Medidas" de París compara las diversas escalas individuales de tiempo atómico que conforman la red mundial y establece y distribuye un tiempo atómico medio que se denomina *tiempo atómico internacional (TAI)*. Actualmente, el Real Instituto y Observatorio de la Armada en San Fernando participa en la confección del tiempo atómico internacional con 6 patrones atómicos. El tiempo atómico internacional se obtiene mediante

$$TAI = \frac{\sum p_i\, TA(i)}{\sum p_i}$$

donde p_i es el peso atribuido a cada escala individual $TA(i)$.

Definición 7.21 *Se define el segundo atómico, unidad de la escala de tiempo atómico, como la duración de 9192631770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133.*

Se define el origen de la escala de tiempo atómico el instante en que el tiempo atómico internacional coincide con el tiempo universal $TU2$ *al comienzo de 1958 enero 0. Esta coincidencia ocurre a las* $0^h0^m0^s0039\,TU2$ *de dicho día.*

El segundo atómico es la unidad de tiempo del Sistema Internacional y se definió así de forma que coincidiera con el segundo de efemérides.

El acceso al tiempo atómico internacional se obtiene en primera aproximación a través de las señales horarias radiotelegráficas y con mayor precisión mediante comparaciones con las escalas atómicas conservadas en determinados centros científicos de cada país.

Si bien es cierto que cualquier fenómeno puede ser referido a la escala de tiempo atómico internacional, hay que tener en cuenta que el tiempo atómico no tiene por qué coincidir exactamente con el tiempo de efemérides que es el tiempo uniforme de la dinámica. Ambos tiempos se definen con métodos operacionales diferentes: el movimiento del Sol y la radiación atómica; por tanto, están dotados de métricas distintas con lo que el segundo atómico varía respecto del segundo de efemérides en 32^s18.

Por otra parte, la escala de tiempo universal es imprescindible en todas las aplicaciones que dependen de una medida de la rotación de la Tierra, tales como en navegación, en medidas geodésicas y en observaciones astronómicas.

Desde 1984, y en aplicación de las recomendaciones de la Unión Astronómica Internacional celebrada en Grenoble en 1976, se introdujo la escala de *tiempo dinámico terrestre* (TDT) en sustitución de la escala de tiempo de efemérides, de forma que la unidad de esta escala coincide con el segundo de tiempo atómico pero reducido en primer lugar al geoide y posteriormente a un sistema geocéntrico, con lo que se eliminan las variaciones del campo gravitatorio y de la rotación terrestre.

Para evitar discontinuidades en las tablas de las efemérides que se han publicado con anterioridad a 1984 y por tanto referidas al tiempo de efemérides, y las que a partir de 1984 corresponde publicar en función del tiempo dinámico terrestre, esta última escala también deberá estar avanzada con respecto al tiempo atómico internacional la cantidad procedente de la observación, es decir,

$$TDT = TAI + 32^s18.$$

En Mecánica Celeste se utiliza la escala de *tiempo dinámico baricéntrico* (TDB), que se define como una escala de tiempo de efemérides referida al baricentro del Sistema Solar. La relación entre el tiempo dinámico terrestre y el tiempo dinámico

baricéntrico viene dada por

$$TDB = TDT + 0^s001658 \operatorname{sen} g + 0^s00014 \operatorname{sen} 2g,$$

siendo g la anomalía media de la Tierra en su órbita alrededor del Sol que viene dada por

$$g = 357^o + 0^o98560028\,(FJ - 2451545{,}0)$$

Finalmente, la escala de tiempo adoptada para utilizarse en las emisiones horarias, de forma que proporcione al usuario el tiempo universal $TU1$ con la precisión que necesita en sus aplicaciones es la escala de *tiempo universal coordinado* (UTC). Esta escala se basa en los convenios siguientes:

i) La diferencia entre esta escala y la de tiempo atómico internacional es un número exacto de segundos.

ii) La diferencia entre el tiempo universal $TU1$ y el tiempo universal coordinado UTC no puede exceder nunca de 0^s9.

iii) Para mantener los compromisos, cuando sea necesario, pueden efectuarse saltos de 1^s exactamente en la escala UTC.

iv) Las emisiones de las señales horarias se adaptan al UTC dentro de la tolerancia de 0^s0002.

El Real Instituto y Observatorio de la Armada en San Fernando produce, conserva y difunde mediante señales horarias, una escala de UTC de uso oficial en España.

7.5. Calendarios y fecha juliana

Definición 7.22 *Se llama calendario a cualquier sistema arbitrario de subdividir una escala temporal para medir convenientemente el tiempo según las necesidades de la vida social.*

El calendario, como todo sistema de medida, sirve para fijar el instante en que ocurren los sucesos -aspecto cronológico- y para determinar los intervalos de tiempo que separan los diversos acontecimientos –aspecto cronométrico–.

En todo calendario podemos distinguir dos elementos esenciales: una escala de tiempo y una estructuración arbitraria de la escala. Generalmente, se utilizan escalas definidas por los movimientos del Sol y la Luna. Según se utilicen una escala solar, lunar o una combinación de ambas, se tendrán calendarios solares como el calendario gregoriano, lunares como el calendario árabe, o lunisolares como el calendario judío. También se han utilizado otros fenómenos astronómicos; por ejemplo, los egipcios establecían su calendario por la aparición de la estrella Sirio en el horizonte después de su conjunción con el Sol.

No sólo la escala de tiempo empleada en el calendario es arbitraria, sino también las subdivisiones que se utilizan. Históricamente se han utilizado subdivisiones basadas en ciclos astronómicos, tales como el día solar, el mes lunar o el año

trópico. También se han utilizado otras subdivisiones como pueden ser las estaciones, la semana de siete días o la división arbitraria del día en horas, minutos y segundos.

Una vez adoptadas las unidades y los ciclos temporales en que subdivide la escala del calendario, para datar las épocas de la escala en que ocurre un suceso es necesario fijar un instante como origen de la escala del calendario, adoptándose algún suceso histórico excepcional.

Definición 7.23 *Se llama era cronológica a la medida del tiempo mediante el calendario a partir de un suceso determinado.*

Así, en la era cristiana, establecida por Dionisio el Exiguo en el 525 después de Cristo, los años se empiezan a contar a partir de la fecha del nacimiento de Jesucristo, respecto de una escala sin cero; es decir, la era cristiana comienza con el año 1 después de Cristo, designándose el año precedente como el año 1 antes de Cristo.

Por esta razón, el primer siglo de la era cristiana terminó con el día 31 de diciembre del año 100 d.C., y el siglo II comenzó con el 1 de enero del año 101 d.C. De forma similar, el siglo XX comenzó el 1 de enero de 1901, y el siglo XXI comenzó el 1 de enero del año 2001. Asimismo, cuando se quiere medir el número de años transcurridos en intervalos de tiempo cuyo comienzo se sitúa antes del origen de la escala y terminan después del mismo, habrá que restar un año al resultado final; por ejemplo, entre el año 50 a.C. y el año 50 d.C. existen 99 años, y no 100.

Para evitar estas dificultades cronológicas en cómputos astronómicos se coloca un año 0 antes del año 1 d.C. y se cuentan los años positiva o negativamente a partir del comienzo del año 0, que se identifica con el año 1 antes de Cristo de la era cristiana. Así, el año 50 a.C. se designa astronómicamente por el año -49; mientras que, los años después de Cristo conservan en el cómputo astronómico el mismo ordinal de la era cristiana del calendario.

Cómputo Astronómico	-2	-1	0	+1	+2
Era Cristiana	3 a.C.	2 a.C.	1 a.C.	1 d.C.	2 d.C.

Figura 7.18: Fechas astronómicas y calendario cristiano

En general, el año m a.C. se designa astronómicamente $-m+1$, mientras que el año n d.C. se escribe $+n$. Los siglos o periodos de 100 años contados a partir del comienzo del año 0, comienzan siempre en años múltiplos de 100 en la cuenta astronómica, de suerte que el siglo XXI comenzó en enero 0 del año astronómico 2000. Por otra parte y para precisar el instante exacto en que comienza un año,

podemos designar por ejemplo el comienzo astronómico del año 1900 en la escala de tiempo civil de Greenwich por: 1900 enero 0 a 0^hTU.

La historia del calendario es tan antigua como la civilización misma. En todas las culturas y civilizaciones ha existido un calendario que regulaba cualquier manifestación cultural, o religiosa o económica.

A continuación, efectuaremos un breve desarrollo histórico del actual calendario gregoriano, dejando aparte el estudio de otros calendarios como los calendarios prehistóricos –pinturas rupestres y monumentos megalíticos (Stonehenge)–, sumerio, babilónico, hebreo, chino y maya.

El *calendario solar egipcio*, datado hace 4000 años, es el origen del actual calendario gregoriano. La vida social del Antiguo Egipto se regulaba por las inundaciones periódicas del Nilo, que señalaban el comienzo de un nuevo año agrícola. Los egipcios habían observado que el comienzo de las inundaciones coincidía aproximadamente con la primera aparición, denominada *orto helíaco*, de la estrella Sirio poco antes de la salida del Sol. El intervalo entre dos ortos helíacos consecutivos era aproximadamente de 365 días solares. Este intervalo fue el que los egipcios adoptaron como duración fija del año de su calendario. Los 365 días del año se dividían en 12 meses de 30 días seguidos de 5 días adicionales y cada día se dividía en 24 horas. Asimismo, el año egipcio se dividía en tres estaciones de cuatro meses, denominadas estación de las inundaciones, de la siembra y de la cosecha.

Pero como el año solar fijo de 365 días no se ajustaba mediante ninguna corrección al año solar trópico, aproximadamente un cuarto de día más largo, se produjo un adelanto progresivo del comienzo del año del calendario respecto al año trópico. Los egipcios se dieron cuenta de este efecto, que causaba un desplazamiento en las estaciones naturales de los meses del año, aunque cada 1460 años las estaciones y el calendario volvían a coincidir.

En el año 238 a.C., Ptolomeo propuso añadir un día adicional cada cuatro años con objeto de hacer coincidir el año del calendario con las estaciones naturales, pero su reforma encontró tal oposición en las clases sacerdotales que no se llegó a poner en práctica.

No obstante, el calendario solar egipcio de 365 días solares presentaba grandes ventajas para los cálculos astronómicos y se siguió utilizando durante muchos siglos, basta decir que Copérnico todavía lo usaba en sus tablas de los planetas y de la Luna.

El calendario egipcio fue adoptado por los romanos en el año 46 a.C., pero debido al retraso que éste llevaba respecto de las estaciones, Julio César, aconsejado por el astrónomo alejandrino Sosígenes, añadió 85 días el mismo año que se adoptó, resultando un año de 445 días denominado *año de la confusión*. Julio César estableció, de igual modo que en el calendario egipcio, un año solar común de 365 días, dividido en 12 meses de 29, 30 y 31 días según el orden siguiente:

Januarius (31)	Februarius (29)	Martius (31)	Aprilis (30)
Maius (31)	Junius (30)	Quintilis (31)	Sextilis (30)
September (31)	October (30)	November (31)	December (30)

A diferencia del calendario egipcio, se introdujo un año de 366 días cada cuatro años, situando el día añadido entre el 23 y 24 de febrero. Debido a que el día 23 de febrero se denominaba “dies sextus ante calendas martias", el día añadido se designó “bis–sextus", y el año de 366 días pasó a denominarse *año bisiesto*. El calendario así establecido se denominó *calendario juliano*.

Durante el consulado de Marco Antonio, el mes *Quintilis* pasó a denominarse *Julius* en honor de Julio César, y en el año 24 a.C. el senado romano decretó que el mes *Sextilis* pasase e denominarse *Augustus* en honor del emperador César Augusto. Para que el mes dedicado César Augusto no tuviese menos días que el dedicado a Julio César, que tenía 31 días, se añadió al mes *Augustus* un día más, que fue restado de *Februarius*, pasando éste último a tener 28 días en los años comunes y 29 días en los años bisiestos, y los meses de *September* y *November* pasaron a tener 30 días para evitar tres meses seguidos de 31 días, mientras *October* y *December* aumentaron a 31 días.

Enero (31)	Febrero (28/29)	Marzo (31)	Abril (30)
Mayo (31)	Junio (30)	Julio (31)	Agosto (31)
Septiembre (30)	Octubre (31)	Noviembre (30)	Diciembre (31)

Éste fue el modo caprichoso e ilógico en que se establecieron los nombres y duraciones de los meses del calendario juliano que ha perdurado hasta nuestros días.

En el calendario juliano la duración media del año cada cuatro años es 365,25 días solares; por tanto, la diferencia con el año trópico, cuya duración es 365,2427 días solares, es, aproximadamente, de 0,0078 días $\approx 11^m 3^s 7$. Este exceso se va acumulando progresivamente, produciendo un adelanto apreciable del calendario juliano respecto del año trópico.

Así, en el Concilio de Nicea celebrado en el 325 d.C. fue necesario restar 3 días al calendario juliano, pasando el 24 de marzo a ser el 21 de marzo. Además, en este concilio se estableció que la Pascua de Resurrección se celebraría el domingo siguiente al primer plenilunio después del equinoccio de primavera, que se fijó en el 21 de marzo.

A pesar de efectuarse esta corrección, no se establece ningún método para los años futuros, de forma que en 1582, durante el papado del Gregorio XIII, el equinoccio de primavera se había desplazado aproximadamente 10 días y, en lugar de ocurrir el 21 de marzo, ocurría el 11 de marzo; es decir, el equinoccio de primavera se había retrasado con respecto a la fecha del calendario, o lo que es lo mismo, el calendario se había adelantado respecto a la fecha astronómica del comienzo de

la primavera.

La reforma gregoriana del calendario juliano vuelve a fijar la fecha del equinoccio de primavera, cuya importancia religiosa ya se ha mencionado, eliminando 10 días del calendario, de forma que el día siguiente al 4 de octubre de 1582 es el día 15 del mismo mes. Además, para evitar un nuevo adelanto del calendario se adoptó una duración media del año solar de 365,2425 días, denominándose *año gregoriano*, más aproximada al año trópico que la del año juliano. Los años así definidos se ajustan a la duración media indicada modificando el número de años bisiestos, de forma que siguen siendo bisiestos los años divisibles por 4, como en el calendario juliano, pero se suprimen tres bisiestos julianos cada 400 años en los años seculares no divisibles por 400, tales como 1700, 1800, 1900 y 2100; mientras se conservan bisiestos 1600 y 2000. El calendario obtenido mediante esta reforma se llama *calendario gregoriano*.

Aún así, el año gregoriano sigue siendo ligeramente superior al año trópico en 0^d0003 días solares, que equivale a 1^d cada 3300 años, aproximadamente. Además, la sucesión cíclica de los días de la semana origina una falta de coincidencia de los días de la semana con los días del mes en años sucesivos, que nos lleva a engorrosos cálculos cuando deseamos obtener en qué día de la semana cae una determinada fecha del calendario.

Para ajustar con más exactitud el año medio del calendario gregoriano al año trópico es necesario ajustar la regla gregoriana de intercalación de años bisiestos; por ejemplo, Maedler, en 1864, propone suprimir un bisiesto cada 128 años en lugar de tres cada 400 años; en 1961, Moreau suprime, además de los tres bisiestos cada 400 años, los bisiestos milenarios múltiplos de 4000; en este mismo año, García Serrano, propuso la supresión de un bisiesto cada 124 años. Otro intento curioso de modificación del calendario gregoriano es el calendario mundial, que se adapta esencialmente a las ideas del sacerdote M. Mastrofini. En él todos no bisiestos tienen 364 días, exactamente 52 semanas, que se repiten en los mismos días del mes. El día sobrante se considera como un día de fiesta mundial no perteneciente a ninguna semana y se situaría entre el 31 de diciembre y el 1 de enero, y en los años bisiestos habría el segundo día sobrante que se sitúa entre el 30 de junio y el 1 de julio. Los meses tienen 31 y 30 días alternativamente a partir de enero.

En cualquier caso, cualquier reforma del calendario gregoriano lleva consigo una interrupción de la escala básica del mismo con las consiguientes complicaciones cronológicas, debiendo efectuarse únicamente cuando sea imprescindible, caso que no ocurre actualmente, pues la exactitud astronómica del calendario gregoriano, unida a la sencillez de la regla de eliminación de los bisiestos hacen del calendario gregoriano una obra maestra, cuya exactitud astronómica resulta suficiente para todas las aplicaciones prácticas de la vida social.

Las irregularidades cronológicas que presenta el calendario –meses desiguales, días de la semana tienen diferentes fechas para diferentes años–, y los cambios efectuados para pasar del calendario juliano al calendario gregoriano producen

dificultades a la hora de comparar observaciones realizadas en años distantes.

Para evitar estas dificultades José Scaliger, en 1582, propuso contar ininterrumpidamente los días solares medios a partir de un instante origen que fijó el 1 de enero del 4712 a. de C. a las 0^h de tiempo medio. Esta escala continua de tiempo se denomina *periodo juliano* en honor de Julio Scaliger, padre de José Scaliger. El *año juliano* tiene 365,25 días solares medios.

Posteriormente, en 1925, se estableció el origen de la escala del periodo juliano, exactamente, en el mediodía medio (12^hTU) en Greenwich del 0 de enero del año 4713 a. de C., denominándose este día, *día juliano 0*.

La *fecha juliana* correspondiente a un instante cualquiera es el número del día juliano al cual pertenece ese instante seguido de la fracción decimal de día transcurrida desde el mediodía medio del día precedente hasta el instante considerado. Por ejemplo, el día 0 de marzo de 1998 a las 12^hTU comienza el día juliano número 2450873, estando en ese instante el Sol medio sobre el meridiano de Greenwich.

Debido al origen del periodo juliano, cada día juliano comienza a mediodía, mientras que los días del calendario se cuentan a partir de medianoche. Por tanto, para hallar la fecha juliana a medianoche habrá que restar o sumar 0^d5 al día juliano correspondiente al día del calendario, según se desee la fecha juliana al comienzo o al final del día.

Para calcular el día juliano correspondiente que comienza en enero 0 a las 12^hTU de un año A perteneciente al calendario juliano se aplica la siguiente regla:

I) Se calcula el producto $(4712 + A)\,365{,}25$.

II) Si el resultado del producto anterior es un número entero, se resta 1; si el resultado tiene decimales, se toma sólo la parte entera.

Si el año A pertenece al calendario gregoriano, posterior a 1582, la regla práctica para obtener el correspondiente día juliano a enero 0 a las 12^hTU es:

I) Se calcula el producto $(4712 + A)\,365{,}25$.

II) Si el producto es entero, se resta 1; si no lo es, se toma sólo la parte entera.

III) Si el año A está comprendido entre los límites:

$1583 \leq A \leq 1700$: se resta 10.

$1701 \leq A \leq 1800$: se resta 11.

$1801 \leq A \leq 1900$: se resta 12.

$1901 \leq A \leq 2000$: se resta 13.

$2001 \leq A \leq 2100$: se resta 14, etc.

Para calcular otro día del año A, el día juliano se determina añadiendo el número de días transcurridos desde su comienzo. Finalmente, la fecha juliana de un instante cualquiera del año se obtiene sumando la fracción del día correspondiente.

Actualmente, la fecha juliana viene tabulada en los almanaques astronómicos.

En Geodesia Espacial, y puesto que uno de los parámetros que transmiten los satélites artificiales es la época, se utiliza la *fecha juliana modificada* que a 0^hTU es la fecha juliana a 0^hTU menos 2400000,5, consiguiéndose reducir la cantidad de información que necesariamente tiene que emitir el satélite.

Finalmente, también podemos indicar que el tiempo puede medirse por el transcurrir de las estaciones. Éstas están relacionadas con el movimiento del Sol sobre la eclíptica. El comienzo de las estaciones tiene lugar cuando la longitud eclíptica del Sol, $\lambda_\odot$, vale 0º, 90º, 180º y 270º; es decir, cuando el Sol está en Aries, en Cáncer, en Libra y en Capricornio.

Debido a la inclinación del eje de rotación terrestre respecto a la eclíptica, las posiciones anteriores indican el comienzo de la primavera, del verano, del otoño y del invierno en el hemisferio norte y del otoño, del invierno, de la primavera y del verano en el hemisferio sur.

Para el hemisferio norte, y en contra de lo que cabría pensar, el perigeo ocurre durante el invierno y el apogeo durante el verano.

Además, la duración de las estaciones es desigual, pues debido a la ley de las áreas el movimiento del Sol no es uniforme. Así, por ejemplo, la primavera dura 92 días y 20.2 horas, el verano 93 días y 14.4 horas, el otoño 89 días 18.7 horas y el invierno 89 días y 0.5 horas.

7.6. Problemas

1. En un cierto instante, los relojes de tiempo universal y sidéreo del Real Instituto y Observatorio de la Armada en San Fernando señalan las 6^h y las 0^h20^m, respectivamente, cuando simultáneamente, el reloj de tiempo sidéreo del Observatorio de Potsdam marca las 1^h32^m. Se desean conocer las horas de los dos relojes del primer observatorio cuando el reloj de tiempo sidéreo del Observatorio de Potsdam marque las 8^h del mismo día.
2. Determinar la hora oficial española del ocaso del Sol en Pontevedra el día en que la ascensión recta del Sol vale 5^h50^m y la hora sidérea a las 0^h de tiempo universal es 17^h57^m. Considérese $\varepsilon = 23^o26'30''7$.
3. Un día en que la hora sidérea de Greenwich a $0^h\,TU$ es 8^h13^m, se desea saber a qué hora de tiempo universal y con qué distancia cenital podrá observarse, desde un observatorio situado en el meridiano de Greenwich de latitud $42^o56'N$, la estrella de coordenadas absolutas $(3^h15^m, 5^o10')$, precisamente en dirección oeste.
4. Determinado día se observó, en Burgos, a las 3^h30^m de tiempo universal la culminación superior de una estrella de ascensión recta 19^h50^m, y 4^h20^m de tiempo medio más tarde, su paso por el almicantarad de 35º. Calcular la declinación de la estrella y, para dicho día, la hora sidérea a las 0^h de tiempo universal.

5. ¿En qué fecha aproximada de la primavera es máxima la diferencia entre la longitud eclíptica y la ascensión recta del Sol?

6. El día en que la ecuación de tiempo vale $11^m 20^s$, calcular a las $12^h 26^m$ de tiempo universal el ángulo horario del Sol en Cáceres y su ascensión recta, sabiendo que tal día la hora sidérea a las 0^h de tiempo universal es $10^h 54^m$.

7. Una estrella cuya ascensión recta es $17^h 2^m$ pasa por el cenit de Cádiz. Calcular la hora oficial del paso de dicha estrella por el primer vertical de Badajoz el 23 de mayo, sabiendo que para ese día la hora sidérea a las 0^h de tiempo universal vale $15^h 51^m$. Asimismo, hallar la hora verdadera de ese instante y las diferencias de tiempos entre los ocasos de estrella en Cádiz y Badajoz.

8. El día 15 de febrero ($\theta_{0^h\,TU} = 9^h 36^m 26^s 42$), situados en un lugar de España, se observa a las $19^h 57^m$ de tiempo oficial la máxima digresión occidental de una estrella cuyas coordenadas absolutas son: $(2^h, 50^o)$, obteniéndose que la distancia cenital vale $34^o 50'$. Hallar la latitud y la longitud del lugar de observación.

9. El día en que la hora sidérea a la $0^h\,TU$ es $9^h 40^m$, desde un vértice de coordenadas geográficas: $(38^o 20' N, 15^m 10^s W(Gr))$, se observa a la estrella cuyas coordenadas absolutas son $(22^h 30^m, 21^o 35')$ en el instante de su paso por el primer vertical al oeste; obteniéndose un acimut de $131^o 40'$. Hallar el acimut que se obtendría si observásemos la estrella en el instante del ocaso, la hora civil en que ocurre dicho ocaso y el tiempo que la estrella permanezca sobre el horizonte.

10. Calcular los valores límites de las coordenadas absolutas de las estrellas que cruzan el almicantarad de distancia cenital 30° en Madrid, entre las 20^h de tiempo verdadero del día 7 de mayo y las 5^h de tiempo verdadero del día siguiente.

11. Calcular la hora verdadera en Valencia, en el instante que se produce el ocaso de una estrella de coordenadas ecuatoriales absolutas $\alpha = 5^h$ y $\delta = 30^o$ el día 21 de septiembre en Cádiz.

12. Calcular la hora oficial en Moscú cuando en Segovia son las $21^h 10^m$ de tiempo sidéreo. Considerar que a las 0^h de tiempo universal son las $20^h 58^m$ de tiempo sidéreo.

13. Cierto día del año, el Sol culmina en el observatorio de la Universidad de Boston a las $16^h\,28^m$ de tiempo universal, con una distancia cenital de $33^o\,30'$. Sabiendo que para ese día la hora sidérea a las 0^h de tiempo universal fue $6^h\,39^m$, calcular el valor de la oblicuidad de la eclíptica.

14. Siendo E_t la ecuación de tiempo, $\delta_\odot$, $\lambda_\odot$, la declinación y longitud eclíptica del Sol Verdadero, respectivamente, λ_F la longitud eclíptica del Sol Ficticio y ε la oblicuidad de la eclíptica, demostrar:

$$E_t = \arctan(\cot\varepsilon\ \mathrm{sen}\,\delta_\odot\ \sec\lambda_\odot) - \lambda_F$$

15. Calcular la diferencia existente en tiempo universal entre los instantes respectivos del orto del Sol en Cáceres y en Badajoz el día en que la ascensión recta del Sol vale $2^h\,30^m$ y la hora sidérea a las 0^h de tiempo universal es $5^h\,35^m$. Considérese la oblicuidad de la eclíptica $\varepsilon = 23^o\,26'$.

16. Calcular las coordenadas geográficas (ϕ, λ) de un observatorio para el cual la estrella de coordenadas ecuatoriales absolutas $(\alpha = 19^h 40^m, \delta = -22^o)$ se encuentra en su cenit a las 5^h de tiempo universal el día en que la hora sidérea a las 0^h de tiempo universal vale $17^h\,30^m$.

17. En un lugar de longitud geográfica $6^h\,10^m\,E$, el día en que la ascensión recta del Sol vale $4^h\,30^m$ se observa que su ocaso se produce a las $5^h\,20^m$ de tiempo universal. Sabiendo que para ese día la hora sidérea a las 0^h de tiempo universal vale $3^h\,15^m$, calcular la latitud del lugar. Considérese $\varepsilon = 23^o 27'$.

18. Determinar la hora verdadera a la que se produce el paso del Sol por el primer vertical oeste el día en que la longitud eclíptica del Sol es $55^o\,30'$ en un lugar cuyas coordenadas geográficas son $\phi = 30^o\,30'\,N$ y $\lambda = 4^h\,30'\,W$. Siendo: $\varepsilon = 23^o\,27'$, $\theta_{0^h TU} = 1^h\,22^m$, $E_{t_1} = -3^m\,7^s$ y $E_{t_2} = -3^m\,13^s$, la oblicuidad de la eclíptica, la hora sidérea a las 0^h de tiempo universal y las ecuaciones de tiempo de ese día y del día siguiente, respectivamente.

19. El día 3 de Enero se observan dos posiciones correspondientes E_1 y E_2 de la estrella ζ-Perseo cuyas coordenadas absolutas son $(\alpha = 3^h\,53^m, \delta = 31^o\,49')$. Dichas posiciones se observaron a las $8^h\,45^m$ y $12^h\,44^m$ de tiempo universal, respectivamente. Sabiendo que la hora sidérea a las 0^h de tiempo universal de ese día es $6^h\,48^m$ y que la altura observada de la estrella en E_1 es $40^o\,30'$, calcular las coordenadas geográficas del lugar de observación.

20. Calcular la hora oficial en Montevideo correspondiente al instante en que la estrella de coordenadas absolutas $(\alpha = 12^h 40^m, \delta = 60^o 50')$ está en su posición de máxima digresión occidental en Nápoles el día en que la longitud eclíptica del Sol es $\lambda_S = 4^h\,30^m$, la hora sidérea a las 0^h de tiempo universal es $6^h\,48^m\,13^s$ y la oblicuidad de la eclíptica es $\varepsilon = 23^o\,25'$.

21. En Varsovia se realiza una observación del Sol a las $20^h 45^m$ de tiempo medio con un teodolito, obteniéndose las coordenadas horizontales $(A = 95^o 15', h = 18^o 26')$. Sabiendo que ese día la hora sidérea a las $0^h TU$ es $15^h 12^m 52^s$, obtener el valor de la oblicuidad de la eclíptica.

22. El día 25 de mayo se realiza una observación del Sol en su máxima digresión oriental a las $2^h 30^m$ de tiempo verdadero desde un observatorio cuya longitud geográfica respecto del meridiano de Greenwich es $1^h 30^m E$; obteniéndose una longitud eclíptica de 20°. Calcular la latitud geográfica de dicho observatorio sabiendo que la hora sidérea a las 0^h de tiempo universal es $2^h 45^m$ y que el valor de la oblicuidad de la eclíptica es $23^o 27'$.

23. A las $19^h 35^m$ de tiempo sidéreo local de un determinado día se mide, con

un sextante, la altura del Sol resultando ser $18^o15'$. Determinar la latitud del lugar sabiendo que su longitud es 8^m38^sE, que la declinación del Sol ese día es $12^o32'$, que $\theta_{0^hTU} = 3^h25^m$ y que la ecuación de tiempo a las 0^h de tiempo universal de ese día es -5^m10^s y en el mismo instante del día siguiente es -5^m17^s.

8. Correcciones a los sistemas de coordenadas astronómicos

Los sistemas de coordenadas proporcionan las direcciones de los astros del Universo en un instante determinado. Ahora bien, los diferentes sistemas astronómicos se han establecido en base a orígenes, planos y puntos fundamentales invariantes. Además, se ha considerado la Tierra esférica con movimiento de rotación uniforme y carente de atmósfera.

Sin embargo, las posiciones aparentes de los astros en el cielo están afectadas por algunos fenómenos que originan pequeños desplazamientos en sus direcciones respecto de la dirección geométrica definida por tales sistemas de referencia. Atendiendo al efecto que causan, estos fenómenos se pueden clasificar en: geométricos y físicos.

Los efectos geométricos afectan directamente a uno o varios elementos fundamentales del sistema de referencia considerado. A este grupo pertenecen la paralaje –diurna y anua– y la precesión y nutación.

si se efectúa un cambio de origen del sistema de referencia entonces se producirá una variación en las direcciones de los objetos celestes. Cuando se realiza un cambio entre orígenes topocéntrico –lugar de observación– y geocéntrico –centro de masas de la Tierra–, este efecto geométrico se manifiesta como el ángulo desde el que se ve el radio terrestre, denominándose *paralaje diurna*, y cuando el cambio se efectúa entre orígenes geocéntrico y heliocéntrico –centro de masas del Sol– se denomina *paralaje anua* y es el mayor ángulo subtendido por la distancia Sol-Tierra.

Por otra parte, la Tierra no es una esfera, sino que presenta un abultamiento ecuatorial aproximándose en mayor medida a un elipsoide de revolución. Debido a este abultamiento ecuatorial, las fuerzas externas que actúan sobre la Tierra en rotación producen un desplazamiento en sentido retrógrado del eje terrestre y, consecuentemente, se generará una variación en las posiciones de los planos fundamentales, el ecuador celeste y sobre la eclíptica y, por supuesto, sobre su intersección: el punto Aries. Por tanto variarán las coordenadas ecuatoriales y eclípticas. El desplazamiento del eje de rotación terrestre se descompone en la *precesión*, o movimiento de largo periodo, y en otro movimiento de corto periodo, denominado *nutación*.

Los efectos físicos afectan directamente a la dirección aparente de los objetos celestes. A este grupo pertenecen la refracción atmosférica, la aberración de la luz y el movimiento propio.

Cuando la luz procedente de un astro llega hasta un lugar de la superficie terrestre, ha tenido que atravesar la atmósfera que rodea la Tierra. Debido a que la atmósfera es un medio dispersivo, no homogéneo ni vacío, la luz sufre desvia-

ciones a medida que la atraviesa las diferentes capas atmosféricas. Este efecto se denomina *refracción atmosférica o astronómica* y es difícil de modelizar, pues depende de las condiciones meteorológicas existentes en el lugar de observación y en el instante en que se realiza la observación del astro. No obstante, existen diversos modelos que dependen del modelo geométrico elegido y del espesor de las capas atmosféricas, de la dirección del rayo luminoso y de la precisión con que se determine el índice de refracción de cada capa.

La aberración es la variación producida en la dirección aparente de un astro por el movimiento relativo del observador con respecto a la velocidad del astro. Si el desplazamiento se debe al efecto combinado de la velocidad de la luz y del movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol, entonces se denomina *aberración anua*, y *aberración diurna* si la variación de la posición del astro es consecuencia del movimiento de rotación terrestre y de la velocidad de la luz.

Por último, existe otro efecto que se debe al movimiento rectilíneo y uniforme de cada estrella respecto a un sistema de referencia invariable en el espacio. Este movimiento es inherente a cada estrella y se denomina *movimiento propio*.

8.1. Paralaje

La dirección de un astro se refiere a un sistema de coordenadas con un determinado origen de referencia. Si efectuamos un cambio de origen en el sistema de coordenadas elegido, entonces se produce una variación en la dirección del astro, y por tanto, en sus coordenadas astronómicas.

La diferencia en las coordenadas de un astro causadas por el cambio del origen del sistema de referencia es un efecto geométrico que se debe a las posiciones relativas existentes entre los diferentes puntos del espacio susceptibles de ser considerados como origen del sistema de referencia.

Para el estudio de este efecto geométrico, también denominado paralaje del astro, y su influencia sobre las coordenadas astronómicas, será necesario definir qué puntos del espacio podemos elegir como origen de los diferentes sistemas de referencia.

8.1.1. Coordenadas topocéntricas, geocéntricas y heliocéntricas

Aunque en la definición de los sistemas de coordenadas astronómicos se ha considerado como origen del sistema el centro de masas de la Tierra, ésta no es la única opción posible, pudiéndose elegir, dependiendo del propósito, distintos orígenes de coordenadas que darán lugar a diferentes clases de coordenadas.

Definición 8.1 *Si el origen del sistema de coordenadas astronómicas es el lugar de observación sobre la superficie de la Tierra, entonces las coordenadas se denominan* coordenadas topocéntricas*; si es el centro de masas de la Tierra se denominan* coordenadas geocéntricas*, y si es el baricentro del Sistema Solar, que coincide aproximadamente con el centro dinámico del Sol, se denominan* coordenadas heliocéntricas*.*

La elección arbitraria del origen de coordenadas estará, sin embargo, sometida a un cierto criterio lógico. No tiene ningún sentido, por ejemplo, considerar el lugar de observación como origen del sistema eclíptico, esto es, coordenadas topocéntricas eclípticas, así como tampoco coordenadas heliocéntricas horizontales.

Las combinaciones generalmente utilizadas son: coordenadas topocéntricas horizontales, coordenadas geocéntricas horizontales, coordenadas topocéntricas horarias, coordenadas geocéntricas horarias, coordenadas topocéntricas absolutas, coordenadas geocéntricas absolutas, coordenadas heliocéntricas absolutas, coordenadas geocéntricas eclípticas y coordenadas heliocéntricas eclípticas.

Transformación entre coordenadas topocéntricas, geocéntricas y heliocéntricas

Puesto que el origen del sistema de coordenadas afecta a las coordenadas de los astros sobre la esfera celeste, será necesario establecer las expresiones que permitan pasar de unas coordenadas a otras dentro de un mismo sistema astronómico.

En las transformaciones entre coordenadas topocéntricas y geocéntricas consideraremos las hipótesis de modelo esférico de Tierra, con rotación uniforme y sin existencia de atmósfera; en las transformaciones entre geocéntricas y heliocéntricas consideraremos uniforme la velocidad de traslación "aparente" del Sol alrededor de la Tierra y, puesto que la eclíptica es un círculo máximo de la esfera celeste, dicho movimiento "aparente" describirá una órbita circular.

Proposición 8.1 *Si (A, h) y (A', h') son las coordenadas topocéntricas y geocéntricas horizontales de un astro, entonces las expresiones de transformación entre ambas coordenadas vienen dadas por:*

$$\left\{ \begin{array}{l} d \cos A \cos h = d' \cos A' \cos h', \\ d \,\mathrm{sen}\, A \cos h = d' \,\mathrm{sen}\, A' \cos h', \\ d \,\mathrm{sen}\, h = d' \,\mathrm{sen}\, h' - R, \end{array} \right.$$

siendo R el radio de la Tierra, y d, d' las respectivas distancias topocéntrica y geocéntrica de dicho astro.

Demostración. Sea T el lugar de observación y G el centro de masas de la Tierra. Consideremos los sistemas de referencia euclídeos topocéntrico $\{T; X, Y, Z\}$ y geocéntrico $\{G; X', Y', Z'\}$.

Los ejes X, Y y Z están definidos por las direcciones sur (S) y oeste (W) del plano del horizonte en T, y del cénit (Z), respectivamente.

Los ejes X' e Y' son las direcciones paralelas a X e Y por G, y puesto que estamos considerando un modelo esférico de la Tierra, el eje Z' coincide con el eje Z.

Respecto del sistema euclídeo topocéntrico el astro tiene las siguientes coordenadas cartesianas:

$$A_T \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = d \cos A \cos h, \\ y = d \,\mathrm{sen}\, A \cos h, \\ z = d \,\mathrm{sen}\, h, \end{array} \right.$$

y respecto del sistema geocéntrico

$$A_G \equiv \begin{cases} x' = d' \cos A' \cos h', \\ y' = d' \operatorname{sen} A' \cos h', \\ z' = d' \operatorname{sen} h'. \end{cases}$$

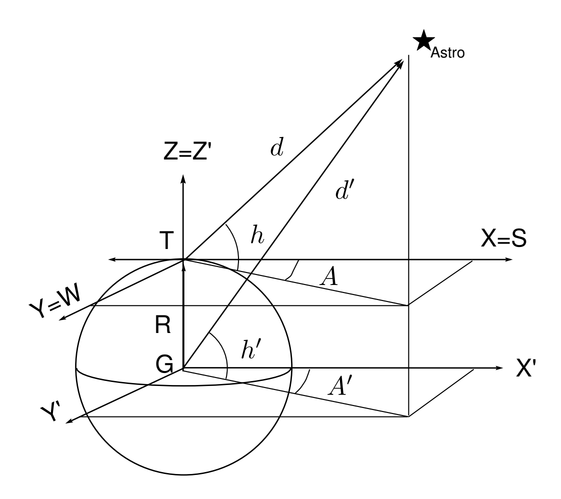


Figura 8.1: Coordenadas horizontales topocéntricas y geocéntricas

De igual modo, las coordenadas cartesianas del lugar de observación T respecto del sistema geocéntrico son:

$$T_G \equiv \begin{cases} x'_T = 0, \\ y'_T = 0, \\ z'_T = R. \end{cases}$$

En esta situación se cumple la siguiente relación vectorial:

$$\overline{G\,Astro} = \overline{G\,T} + \overline{T\,Astro},$$

de donde

$$\overline{T\,Astro} = \overline{G\,Astro} - \overline{G\,T} \Rightarrow A_T = A_G - T_G.$$

Por tanto

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' - R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \cos A \cos h = d' \cos A' \cos h', \\ d \operatorname{sen} A \cos h = d' \operatorname{sen} A' \cos h', \\ d \operatorname{sen} h = d' \operatorname{sen} h' - R. \end{cases}$$

Debido a cómo se definen los sistemas horizontales topocéntrico y geocéntrico, en cualquier caso A y A' son iguales. En cuanto a las alturas, esta transformación tiene realmente sentido cuando tratemos de astros del Sistema Solar, pues en otros casos son prácticamente iguales al ser $d'/d \simeq 1$, $R/d' \simeq 0$ y $R/d \simeq 0$, y, consecuentemente, podemos considerar que las direcciones $\overline{T\,Astro}$ y $\overline{G\,Astro}$ son paralelas.

Proposición 8.2 *Si* (H, δ) *y* (H', δ') *son las coordenadas topocéntricas y geocéntricas horarias de un astro, entonces las expresiones de transformación entre ambas vienen dadas por:*

$$\begin{cases} d \cos H \cos \delta = d' \cos H' \cos \delta' - R \cos \phi, \\ d \operatorname{sen} H \cos \delta = d' \operatorname{sen} H' \cos \delta', \\ d \operatorname{sen} \delta = d' \operatorname{sen} \delta' - R \operatorname{sen} \phi, \end{cases}$$

siendo ϕ *la latitud del lugar de observación,* R *el radio de la Tierra, y* d*,* d' *las respectivas distancias topocéntrica y geocéntrica de dicho astro.*

Demostración. Al igual que en el caso anterior, sean T el lugar de observación y G el centro de masas de la Tierra y $\{T; X, Y, Z\}$ y $\{G; X', Y', Z'\}$ los sistemas de referencia euclídeos topocéntrico y geocéntrico, respectivamente.

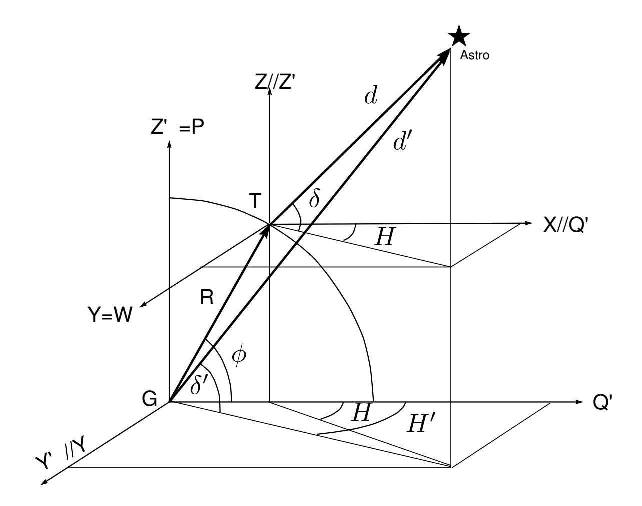


Figura 8.2: Coordenadas horarias topocéntricas y geocéntricas

El eje X' está definido por la dirección del punto Q', el eje Y' por la dirección ortogonal al eje X' medida en sentido retrógrado a partir de éste sobre el ecuador terrestre, y el eje Z por la dirección del polo norte terrestre (P_N). El eje Y' coincide con la dirección paralela por G a la dirección oeste del plano del horizonte en T.

Los ejes X, Y y Z son las direcciones paralelas a X', Y' y Z' por T. Obviamente, el eje Y coincide con la dirección oeste del plano del horizonte en T.

Las coordenadas cartesianas del astro respecto de los sistemas euclídeos topocéntrico y geocéntrico vienen dadas por:

$$A_T \equiv \begin{cases} x = d \cos H \cos \delta, \\ y = d \operatorname{sen} H \cos \delta, \\ z = d \operatorname{sen} \delta. \end{cases} \quad \text{y} \quad A_G \equiv \begin{cases} x' = d' \cos H' \cos \delta', \\ y' = d' \operatorname{sen} H' \cos \delta', \\ z' = d' \operatorname{sen} \delta'. \end{cases}$$

Las coordenadas cartesianas del lugar de observación T respecto del sistema geocéntrico

son:

$$T_G \equiv \begin{cases} x'_T = R\cos\phi, \\ y'_T = 0, \\ z'_T = R\,\mathrm{sen}\,\phi. \end{cases}$$

Puesto que se cumple el mismo modelo vectorial que en el caso anterior se tiene que

$$A_T = A_G - T_G,$$

y por tanto

$$\begin{cases} x = x' - R\cos\phi, \\ y = y', \\ z = z' - R\,\mathrm{sen}\,\phi. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\cos H\cos\delta = d'\cos H'\cos\delta' - R\cos\phi, \\ d\,\mathrm{sen}\,H\cos\delta = d'\,\mathrm{sen}\,H'\cos\delta', \\ d\,\mathrm{sen}\,\delta = d'\,\mathrm{sen}\,\delta' - R\,\mathrm{sen}\,\phi. \end{cases}$$

Estas transformaciones tienen la misma restricción que en el caso anterior, es decir, se aplicarán cuando consideremos astros del Sistema Solar. En general, los ángulos horarios topocéntrico y geocéntrico no tienen por qué ser iguales.

Proposición 8.3 *Si* (α,δ) *y* (α',δ') *son las coordenadas topocéntricas y geocéntricas absolutas de un astro, entonces las expresiones de transformación entre dichas coordenadas vienen dadas por:*

$$\begin{cases} d\cos\alpha\cos\delta = d'\cos\alpha'\cos\delta' - R\cos\phi\cos\theta, \\ d\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\delta = d'\,\mathrm{sen}\,\alpha'\cos\delta' - R\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, \\ d\,\mathrm{sen}\,\delta = d'\,\mathrm{sen}\,\delta' - R\,\mathrm{sen}\,\phi, \end{cases}$$

siendo ϕ *la latitud del lugar de observación,* R *el radio de la Tierra,* θ *la hora sidérea, y* d*,* d' *las respectivas distancias topocéntrica y geocéntrica de dicho astro.*

Demostración. Los elementos de los sistemas euclídeos topocéntrico y geocéntrico considerados $\{T; X, Y, Z\}$ y $\{G; X', Y', Z'\}$ son:

Los orígenes topocéntrico y geocéntrico son, respectivamente, el lugar de observación (T) y el centro de masas de la Tierra (G).

El eje X' se define por la dirección del punto Aries, el eje Y' por la dirección del ecuador terrestre ortogonal en sentido directo al eje X' y el eje Z' por la dirección del polo norte terrestre (P_N).

Los ejes X, Y y Z son ejes paralelos a los ejes X', Y' y Z' por el lugar de observación T.

Las coordenadas cartesianas topocéntricas y geocéntricas del astro son:

$$A_T \equiv \begin{cases} x = d\cos\alpha\cos\delta, \\ y = d\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\delta, \\ z = d\,\mathrm{sen}\,\delta. \end{cases} \quad \text{y } A_G \equiv \begin{cases} x' = d'\cos\alpha'\cos\delta', \\ y' = d'\,\mathrm{sen}\,\alpha'\cos\delta', \\ z' = d'\,\mathrm{sen}\,\delta'. \end{cases}$$

y las coordenadas geocéntricas del lugar de observación,

$$T_G \equiv \begin{cases} x'_T = R\cos\phi\cos\theta, \\ y'_T = R\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, \\ z'_T = R\,\mathrm{sen}\,\phi. \end{cases}$$

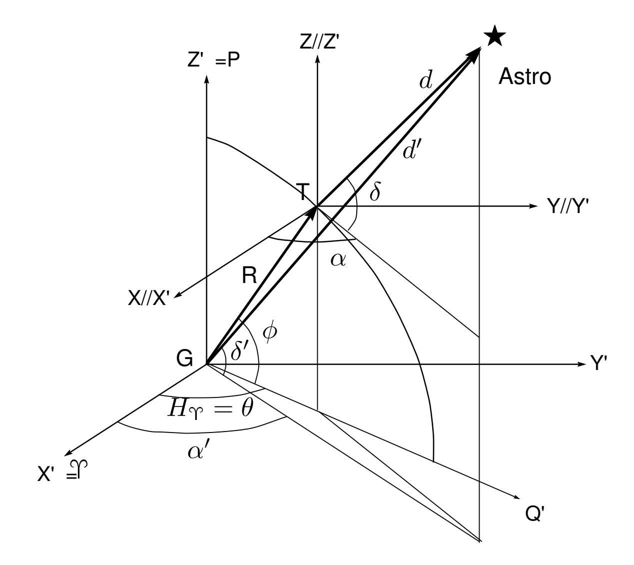


Figura 8.3: Coordenadas absolutas topocéntricas y geocéntricas

Sustituyendo estas coordenadas en el modelo vectorial

$$\overline{T\,Astro} = \overline{G\,Astro} - \overline{G\,T},$$

que, como en las transformaciones anteriores, equivale a $A_T = A_G - T_G$. Se tiene finalmente que

$$\begin{cases} d\,\cos\alpha\,\cos\delta = d'\,\cos\alpha'\,\cos\delta' - R\,\cos\phi\,\cos\theta, \\ d\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\cos\delta = d'\,\mathrm{sen}\,\alpha'\,\cos\delta' - R\,\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, \\ d\,\mathrm{sen}\,\delta = d'\,\mathrm{sen}\,\delta' - R\,\mathrm{sen}\,\phi. \end{cases}$$

Igual que en el caso anterior las ascensiones rectas topocéntrica y geocéntrica no serán, en general, iguales. Estas transformaciones tienen sentido en astros del Sistema Solar.

Proposición 8.4 *Si (α,δ) y (α',δ') son las coordenadas geocéntricas y heliocéntricas absolutas de un astro, entonces las expresiones de transformación entre ellas vienen dadas por*

$$\begin{cases} d'\,\cos\alpha\,\cos\delta = d''\,\cos\alpha'\,\cos\delta' + s\,\cos\lambda_\odot, \\ d'\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\cos\delta = d''\,\mathrm{sen}\,\alpha'\,\cos\delta' + s\,\mathrm{sen}\,\lambda_\odot\,\cos\epsilon, \\ d'\,\mathrm{sen}\,\delta = d''\,\mathrm{sen}\,\beta' + s\,\mathrm{sen}\,\lambda_\odot\,\mathrm{sen}\,\epsilon, \end{cases}$$

siendo s la distancia entre el Sol y la Tierra, $\lambda_\odot$ la longitud eclíptica geocéntrica del Sol, d', d'' las respectivas distancias geocéntrica y heliocéntrica de dicho astro, y ϵ la oblicuidad de la eclíptica.

Demostración. Consideramos los siguientes sistemas eclípticos geocéntrico y heliocéntrico $\{G; X, Y, Z\}$ y $\{\odot; X', Y', Z'\}$, cuyos elementos se definen por:

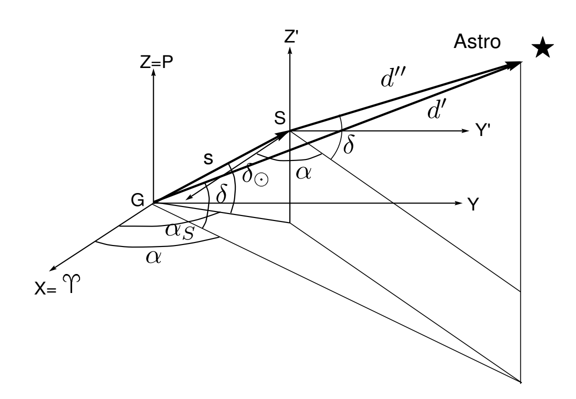


Figura 8.4: Coordenadas absolutas geocéntricas y heliocéntricas

El centro de masas de la Tierra y el centro dinámico del Sistema Solar son, respectivamente, G y $\odot$.

El eje X está definido sobre el plano de la eclíptica según la dirección del punto Aries, el eje Y, también perteneciente al plano de la eclíptica, se establece ortogonal al eje X medido en sentido directo, y el eje Z queda determinado por la dirección del polo norte celeste (P).

Los ejes X', Y' y Z' son paralelos a los ejes X, Y y Z por el origen del sistema heliocéntrico.

Respecto a estos sistemas de coordenadas, las coordenadas geocéntricas y heliocéntricas de un astro vienen dadas por

$$A_G \equiv \begin{cases} x = d' \cos\alpha \cos\delta, \\ y = d' \operatorname{sen}\alpha \cos\delta, \\ z = d' \operatorname{sen}\delta. \end{cases} \quad \text{y} \quad A_\odot \equiv \begin{cases} x' = d'' \cos\alpha' \cos\delta', \\ y' = d'' \operatorname{sen}\alpha' \cos\delta', \\ z' = d'' \operatorname{sen}\delta'. \end{cases}$$

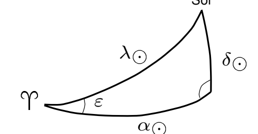


Figura 8.5

Las coordenadas geocéntricas del Sol son

$$\odot_G \equiv \begin{cases} x'_\odot = s \cos\alpha_\odot \cos\delta_\odot, \\ y'_\odot = s \operatorname{sen}\alpha_\odot \cos\delta_\odot, \\ z'_\odot = s \cos\delta_\odot. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta el modelo vectorial $\overline{GA} = \overline{G\odot} + \overline{\odot A}$, que equivale en coordenadas a $A_G = G_\odot + \odot_A$, se tiene que

$$\begin{cases} d' \cos\alpha \cos\delta = d'' \cos\alpha' \cos\delta' + s \cos\alpha_\odot \cos\delta_\odot, \\ d' \operatorname{sen}\alpha \cos\delta = d'' \operatorname{sen}\alpha' \cos\delta' + s \operatorname{sen}\alpha_\odot \cos\delta_\odot, \\ d' \operatorname{sen}\delta = d'' \operatorname{sen}\beta' + s \cos\delta_\odot. \end{cases}$$

Como habitualmente las posiciones del Sol vienen dadas en coordenadas eclípticas, interesa transformar las coordenadas absolutas del Sol a este sistema de referencia. El triángulo de posición es rectilátero puesto que el Sol se encuentra sobre la eclíptica, de modo que considerando el pentágono de Neper se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} \cos\lambda_\odot = \cos\alpha_\odot \cos\delta_\odot, \\ \operatorname{sen}\lambda_\odot \cos\epsilon = \operatorname{sen}\alpha_\odot \cos\delta_\odot, \\ \operatorname{sen}\lambda_\odot \operatorname{sen}\epsilon = \operatorname{sen}\delta_\odot. \end{cases}$$

Finalmente,

$$\begin{cases} d' \cos\alpha \cos\delta = d'' \cos\alpha' \cos\delta' + s \cos\lambda_\odot, \\ d' \operatorname{sen}\alpha \cos\delta = d'' \operatorname{sen}\alpha' \cos\delta' + s \operatorname{sen}\lambda_\odot \cos\epsilon, \\ d' \operatorname{sen}\delta = d'' \operatorname{sen}\beta' + s \operatorname{sen}\lambda_\odot \operatorname{sen}\epsilon. \end{cases}$$

Proposición 8.5 *Si (λ,β) y (λ',β') son las coordenadas geocéntricas y heliocéntricas eclípticas de un astro, entonces las expresiones de transformación entre ambas vienen dadas por*

$$\begin{cases} d' \cos\lambda \cos\beta = d'' \cos\lambda' \cos\beta' + s \cos\lambda_\odot, \\ d' \operatorname{sen}\lambda \cos\beta = d'' \operatorname{sen}\lambda' \cos\beta' + s \operatorname{sen}\lambda_\odot, \\ d' \operatorname{sen}\beta = d'' \operatorname{sen}\beta'. \end{cases}$$

siendo s la distancia entre el Sol y la Tierra, $\lambda_\odot$ la longitud eclíptica geocéntrica del Sol, y d', d'' las respectivas distancias geocéntrica y heliocéntrica de dicho astro.

Demostración. Consideramos los siguientes sistemas eclípticos geocéntrico y heliocéntrico $\{G; X, Y, Z\}$ y $\{\odot; X', Y', Z'\}$ cuyos elementos se definen por:

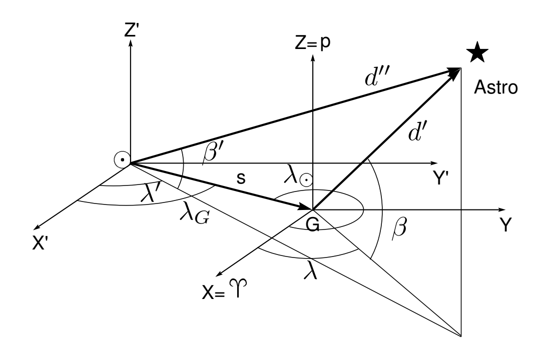


Figura 8.6: Coordenadas eclípticas geocéntricas y heliocéntricas

• El centro de masas de la Tierra y el centro dinámico del Sistema Solar son, respectivamente, G y $\odot$.

• El eje X está definido sobre el plano de la eclíptica según la dirección del punto Aries, el eje Y, también perteneciente al plano de la eclíptica, se establece ortogonal al eje X

medido en sentido directo, y el eje Z queda determinado por la dirección del polo norte de la eclíptica (π).

• Los ejes X', Y' y Z' son paralelos a los ejes X, Y y Z por el origen del sistema heliocéntrico.

Respecto a estos sistemas de coordenadas, las coordenadas geocéntricas y heliocéntricas de un astro vienen dadas por:

$$A_G \equiv \begin{cases} x = d' \cos\lambda \cos\beta, \\ y = d' \operatorname{sen}\lambda \cos\beta, \\ z = d' \operatorname{sen}\beta, \end{cases} \quad \text{y} \quad A_\odot \equiv \begin{cases} x' = d'' \cos\lambda' \cos\beta', \\ y' = d'' \operatorname{sen}\lambda' \cos\beta', \\ z' = d'' \operatorname{sen}\beta'. \end{cases}$$

Como el Sol y la Tierra están situado en el plano de la eclíptica, las coordenadas heliocéntricas del geocentro son

$$G_\odot \equiv \begin{cases} x'_\odot = s \cos\lambda_G, \\ y'_\odot = s \operatorname{sen}\lambda_G, \\ z'_\odot = 0, \end{cases}$$

siendo s la distancia Sol-Tierra.

Aplicando la relación de coordenadas $A_G = A_\odot - G_\odot$, se tiene que

$$\begin{cases} d' \cos\lambda \cos\beta = d'' \cos\lambda' \cos\beta' - s \cos\lambda_G, \\ d' \operatorname{sen}\lambda \cos\beta = d'' \operatorname{sen}\lambda' \cos\beta' - s \operatorname{sen}\lambda_G, \\ d' \operatorname{sen}\beta = d'' \operatorname{sen}\beta'. \end{cases}$$

Generalmente dispondremos de las coordenadas geocéntricas del Sol en lugar de las heliocéntricas de la Tierra, de modo que consideraremos el vector $\overline{G\odot}$ en lugar de $\overline{\odot G}$, y por tanto, $\lambda_G = \lambda_\odot - 180^o$, con lo que las ecuaciones de transformación serán finalmente:

$$\begin{cases} d' \cos\lambda \cos\beta = d'' \cos\lambda' \cos\beta' + s \cos\lambda_\odot, \\ d' \operatorname{sen}\lambda \cos\beta = d'' \operatorname{sen}\lambda' \cos\beta' + s \operatorname{sen}\lambda_\odot, \\ d' \operatorname{sen}\beta = d'' \operatorname{sen}\beta'. \end{cases}$$

Esta transformación no tiene restricciones y se aplica para cualquier astro de la esfera celeste.

Las proposiciones anteriores proporcionan expresiones que permiten transformar coordenadas de un astro entre sistemas astronómicos con diferentes orígenes en el espacio. Las diferentes coordenadas topocéntricas, geocéntricas o heliocéntricas de un astro en el mismo instante suponen una variación de la dirección del astro según que sea observado desde un origen u otro.

Otra forma de estudiar y analizar las variaciones producidas en la dirección del astro cuando se realiza un cambio del origen del sistema de coordenadas consiste en tratar de expresar dicha variación desde el punto de vista del propio astro. Así, la diferencia entre las direcciones del astro correspondientes a uno y otro origen puede expresarse como el ángulo formado por las direcciones a ambos puntos desde el astro. Formalicemos estas ideas.

Definición 8.2 *El efecto geométrico que expresa la variación de la dirección de un astro cuando se efectúa un cambio del origen del sistema de coordenadas de un punto a otro del espacio se denomina* paralaje del astro*; siendo, en cada instante el ángulo determinado por las direcciones desde el astro a uno y otro origen. Si se efectúa el cambio entre coordenadas topocéntricas y geocéntricas, la paralaje del astro se denomina* paralaje diurna*, y si es entre coordenadas geocéntricas y heliocéntricas, se denomina* paralaje anua*.*

Es claro que la paralaje equivale al ángulo subtendido en el astro por la distancia existente entre uno y otro origen. Si bien en el caso del cambio entre coordenadas geocéntricas y heliocéntricas seguiremos manteniendo la hipótesis de órbita circular, y por tanto la distancia entre el Sol y la Tierra será constante, cuando tratemos del cambio entre coordenadas topocéntricas y geocéntricas tendremos que tener en cuenta el modelo de representación terrestre que se considere.

8.1.2. Modelos de representación terrestre

El estudio de la forma y dimensiones de la Tierra es, desde la antigüedad, uno de los problemas científicos de mayor interés. La necesidad de materializar las rutas de comunicación entre la metrópoli y las colonias y el establecimiento de límites fronterizos, tanto individuales como colectivos, motiva desde los primeros tiempos el origen de disciplinas como la Cartografía y la Topografía.

Estos aspectos expresan un carácter local –origen de observaciones astronómicas– o regional -cartas náuticas y mapas de dominios próximos- en la concepción del planeta Tierra. Es con el transcurso del tiempo, y no sin muchas vicisitudes negativas, cuando en los siglos XVII y XVIII se plantea la necesidad de un conocimiento global del planeta. Surge así la Geodesia, como ciencia que se ocupa del estudio de la forma y dimensiones de la Tierra.

Si bien es cierto que con anterioridad a los siglos XVII y XVIII ya se habían realizado medidas geodésicas –determinación del radio terrestre, Eratóstenes (siglo II a. de C.), Califato de Al-Mamum (año 833), Fernel (1528)– es en estos siglos cuando la Geodesia empieza a desarrollarse de forma considerable.

Las teoría de la triangulación y nivelación geodésica –Snellius (1615)–, y el desarrollo de instrumentos más precisos –regla bimetálica, teodolitos, sextantes y cuadrantes– suponen un cambio radical, tanto en las observaciones geodésicas como en los resultados obtenidos.

Newton, en 1687, establece que la Tierra tiene forma de un esferoide achatado por los Polos, en contraposición con Cassini, que sostiene que el achatamiento terrestre se manifiesta en el Ecuador. Esta discusión sobre la forma de la Tierra lleva a la Academia Real Francesa a organizar dos expediciones, una a Laponia y otra a Perú. En ambas expediciones se mide un grado de arco de meridiano y en 1744, a la vista de dichos resultados, Maupertius establece que, en concordancia con las teorías de Newton, la Tierra es un esferoide achatado por los Polos.

En 1795, Gauss define el *geoide*, o superficie equipotencial coincidente con el nivel

medio de los mares en reposo como nueva superficie de referencia terrestre.

Por otra parte, Laplace, en 1796, combina diversas medidas de arco de meridiano, estableciendo un aplanamiento terrestre de 1/250.

El gran impulso a la Geodesia dado por el Racionalismo Ilustrado, unido al diseño y construcción de instrumentos cada vez más exactos y precisos, produce resultados cualitativa y cuantitativamente significativos a lo largo de todo el siglo XIX. Entre estos resultados destaca el establecimiento como superficie de referencia terrestre de diferentes elipsoides de revolución, dotando de un carácter geométrico global a la Geodesia, del que el geoide como superficie física carecía.

Se pueden destacar los diferentes modelos elipsódicos establecidos durante este período: Struve (1817), Gauss (1824), Everest (1830), Airy (1830), Bessel (1840) y Clarke (1880).

Actualmente, los modelos de representación terrestre se denominan Sistemas Geodésicos Globales y establecen un marco de referencia básico para asignar coordenadas geodésicas a estaciones situadas sobre la Tierra, una figura geométrica de referencia y un modelo gravitacional. Además, proporcionan las expresiones para relacionar posiciones referidas a un sistema local con un sistema de coordenadas geocéntrico dotado del mismo movimiento de rotación que la Tierra.

El Sistema de Referencia Global (World Geodetic System 1984, WGS-84) se define utilizando datos procedentes de seguimientos de satélites TRANSIT y Láser, medidas gravimétricas realizadas sobre la superficie de la Tierra y ondulaciones del geoide obtenidas mediante satélites altimétricos para regiones oceánicas situadas en latitudes entre $70^o N$ y $70^o S$, aproximadamente.

Definición 8.3 *Las principales superficies que podemos establecer sobre la Tierra son:*

Superficie topográfica terrestre ... *superficie real de la Tierra.*

Esfera terrestre ... *superficie de referencia de la Tierra en primera aproximación. Se suele considerar como radio de esta esfera $R = 6371\, Km$.*

Geoide ... *superficie equipotencial que coincide con el nivel medio de los mares en reposo. Esta superficie es la superficie de referencia de las altitudes terrestres que se obtienen por nivelación geodésica. Por cada punto de la superficie topográfica terrestre pasa una única superficie equipotencial y la dirección normal a esta superficie coincide con la línea de la plomada. Además, las superficies equipotenciales no son paralelas.*

Elipsoide de revolución ... *superficie de referencia de las coordenadas geodésicas angulares –latitud y longitud– de un punto sobre la superficie topográfica terrestre, dotando de carácter global a la Geodesia. Se relaciona con el geoide mediante la ondulación del geoide. En la actualidad se utiliza el elipsoide de revolución que contiene el Sistema Geodésico Global WGS-84, y cuyos parámetros geométricos son: $a = 6378{,}775\, Km.$ y $b = 6356{,}752\, Km.$*

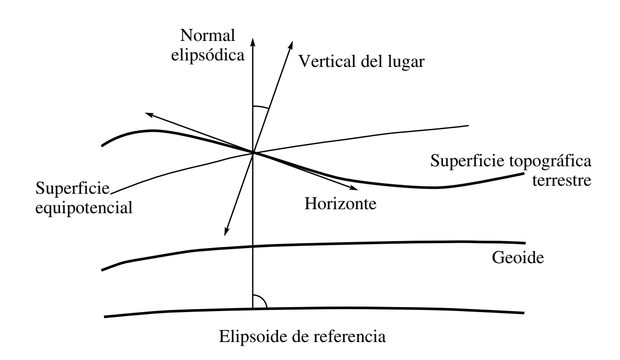


Figura 8.7: Modelos de representación de la Tierra

En el modelo esférico terrestre se definió la latitud de un lugar como el ángulo determinado por la dirección de la vertical, o línea de la plomada, en dicho lugar con el plano del ecuador terrestre.

Puesto que en el modelo esférico coinciden el plano del horizonte con el plano tangente a la esfera en el punto, la dirección de la línea de la plomada coincide con la dirección normal al plano tangente a la esfera terrestre, y, además, ambas direcciones pasan por el geocentro.

Sin embargo, en el modelo elipsódico, la dirección normal al plano tangente al elipsoide de revolución en el punto no coincide con la dirección de la línea de la plomada, ni tampoco coincidirá con la dirección que definen el geocentro y el punto.

Definición 8.4 *Si consideramos un modelo elipsódico terrestre para un punto situado sobre la superficie terrestre podemos definir:*

Latitud geocéntrica φ' … ángulo formado por el radio vector geocéntrico del punto con el ecuador terrestre.

Latitud geodésica φ … ángulo formado por la normal al elipsoide en el punto con el ecuador terrestre.

Latitud astronómica ϕ … ángulo formado por la vertical del punto con el ecuador terrestre.

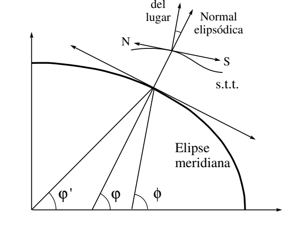
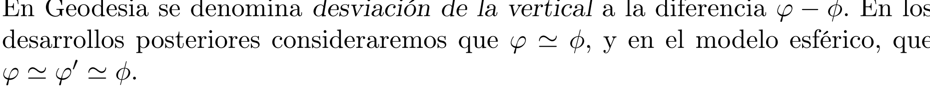


Figura 8.8: Latitudes geocéntrica, geodésica y astronómica


En Geodesia se denomina *desviación de la vertical* a la diferencia $\varphi - \phi$. En los desarrollos posteriores consideraremos que $\varphi \simeq \phi$, y en el modelo esférico, que $\varphi \simeq \varphi' \simeq \phi$.

Proposición 8.6 *En un modelo elipsódico terrestre, la relación entre las latitudes geocéntrica φ' y geodésica φ de un punto viene dada por*

$$\tan\varphi = \frac{a^2}{b^2}\tan\varphi',$$

siendo a y b los semiejes mayor y menor del elipsoide de revolución.

Demostración. Consideremos sobre el elipsoide de revolución la ecuación de la elipse meridiana que pasa por un punto cuyas coordenadas cartesianas respecto de esta elipse son (x, y)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

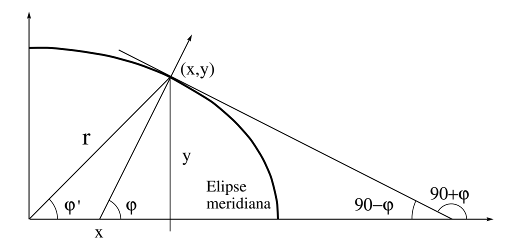


Figura 8.9: Elipse meridiana y ángulos relacionados

Derivando dicha expresión se tiene que

$$\frac{2x}{a^2}\,dx + \frac{2y}{b^2}\,dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x}{y}.$$

Por otra parte, como

$$\tan\varphi' = \frac{y}{x}, \text{ y } \frac{dy}{dx} = \tan(90^{\circ} + \varphi),$$

se tiene que $\tan(90^{\circ} + \varphi) = -\dfrac{b^2}{a^2}\cot\varphi'$, de donde

$$\tan\varphi = \frac{a^2}{b^2}\tan\varphi'.$$

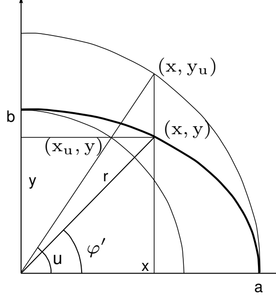


Figura 8.10: Latitud reducida

Partiendo de un punto (x, y) de la elipse meridiana de un elipsoide de revolución de semiejes mayor y menor a y b, podemos establecer los puntos de coordenadas (x_b, y) y (x, y_a). Ambos puntos están situados sobre las circunferencias de radios b y a, respectivamente, y, además, sobre el mismo radio vector geocéntrico.

Definición 8.5 *Al ángulo determinado por este radio vector geocéntrico con el ecuador terrestre se le denomina* latitud reducida *del punto.*

Proposición 8.7 *Las expresiones que relacionan las latitudes geocéntrica y geodésica con la latitud reducida vienen dadas por:*

$$\tan\varphi' = \frac{b}{a}\tan u, \qquad \tan\varphi = \frac{a}{b}\tan u,$$

siendo a y b los semiejes mayor y menor del elipsoide de referencia.

Dado que las ecuaciones paramétricas de la elipse meridiana en función de la latitud reducida son

$$\begin{cases} x = a \cos u, \\ y = b \operatorname{sen} u, \end{cases}$$

y que, el radio terrestre es $r^2 = x^2 + y^2$, para calcular el valor del radio en un punto de la superficie terrestre bastará calcular la latitud reducida en dicho punto.

8.1.3. Paralaje diurna

Definición 8.6 *Se denomina paralaje diurna (p), o paralaje en altura, de un astro en un instante determinado, al ángulo bajo el cual se ve el radio terrestre desde el astro.*

Proposición 8.8 *Si z y z' son las distancias cenitales topocéntrica y geocéntrica, entonces la paralaje diurna de un astro viene dada por*

$$p = z - z'.$$

La paralaje diurna debe aplicarse cuando se realicen transformaciones entre coordenadas topocéntricas y geocéntricas y para astros del Sistema Solar. Su mínimo valor, 0°, se alcanza cuando el astro está en el cénit y cuanto más alejado esté el astro, menor será su paralaje diurna.

La paralaje diurna varía con el movimiento diurno pues, aunque la distancia geocéntrica sea constante, la distancia cenital topocéntrica varía.

Se utiliza para el cálculo de distancias y semidiámetros angulares de astros del Sistema Solar.

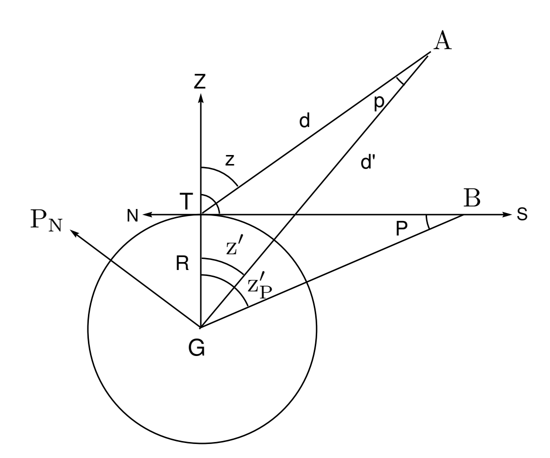


Figura 8.11: Paralaje diurna y paralaje horizontal

Definición 8.7 *Tanto en el modelo esférico como en el modelo elipsódico terrestre, se denomina* paralaje horizontal *(P) a la paralaje diurna cuando el astro está situado en el horizonte.*

En un modelo elipsódico terrestre se denomina paralaje horizontal ecuatorial *(π) al máximo valor de la paralaje diurna, cuando el astro está en el horizonte y para observadores situados sobre el ecuador terrestre.*

La paralaje horizontal en el modelo esférico es un valor constante para cada astro y en cualquier lugar de la superficie de la Tierra. Si embargo, en el modelo elipsódico terrestre será variable, puesto que depende del radio y éste depende de la latitud del lugar.

Corolario 8.1 *Si z' es la distancia cenital geocéntrica de un astro, entonces su paralaje horizontal viene dada por $P = 90^o - z'$.*

Proposición 8.9 *En el modelo esférico terrestre la paralaje diurna de un astro viene dada, en función de la distancia cenital topocéntrica z, del radio esférico R y de la distancia geocéntrica del astro d', por*

$$p = \frac{R}{d'} \operatorname{sen} z,$$

y en función de la distancia cenital geocéntrica z', del radio esférico R y de la distancia topocéntrica del astro d, por

$$p = \frac{R}{d} \operatorname{sen} z'.$$

Demostración. Aplicando el teorema de los senos al triángulo plano determinado por el centro de la Tierra, el lugar de observación y el astro, se tiene

$$\frac{\operatorname{sen} p}{R} = \frac{\operatorname{sen}(180^{\rm o} - z)}{d'} = \frac{\operatorname{sen} z'}{d}.$$

De la primera igualdad, $\operatorname{sen} p = \frac{R}{d'} \operatorname{sen} z$. Puesto que la paralaje es un ángulo pequeño podemos aproximar el seno por el ángulo y tendremos que

$$p = \frac{R}{d'} \operatorname{sen} z.$$

De la segunda igualdad, $\operatorname{sen} p = \frac{R}{d} \operatorname{sen} z' \Rightarrow p = \frac{R}{d} \operatorname{sen} z'$.

Proposición 8.10 *Si consideramos un modelo elipsódico terrestre, entonces la paralaje diurna de un astro en un lugar de latitud geodésica φ viene dada por*

$$p = z - z' - (\varphi - \varphi'),$$

o por

$$p = \frac{r}{d'} \operatorname{sen}(z - (\varphi - \varphi')) = \frac{r}{d} \operatorname{sen} z',$$

y la paralaje horizontal ecuatorial viene dada por

$$\pi = \frac{a}{d'},$$

siendo z y z' las distancias cenitales topocéntrica y geocéntrica, d y d' las distancias topocéntrica y geocéntrica del astro, a el semieje mayor del elipsoide de referencia y r el valor del radio terrestre en el lugar considerado.

Corolario 8.2 *La paralaje horizontal en los modelos esférico y elipsódico viene dada, respectivamente, por*

$$P = \frac{R}{d'}, \qquad P = \frac{r}{d'}, \cos(\varphi - \varphi'),$$

siendo R el radio esférico de la Tierra, r el valor de la distancia geocéntrica del lugar de observación para el modelo elipsódico, y d' la distancia geocéntrica del astro.

Proposición 8.11 *En los modelos esférico y elipsódico, la paralaje diurna y la paralaje horizontal de un astro se relacionan, respectivamente, por*

$$p = P \operatorname{sen} z, \qquad p = \pi \frac{r}{a} \operatorname{sen}(z - (\varphi - \varphi')).$$

Nota La aproximación $\operatorname{sen} p \simeq p$ procede del desarrollo de Taylor

$$\operatorname{sen} p = p - \frac{p^3}{3!} + ...,$$

donde el ángulo p está definido en radianes. Efectuando cálculos sencillos se comprueba que $p\,(radianes) \simeq p'' \operatorname{sen} 1''$; por tanto, para el modelo esférico tendremos que

$$p'' = \frac{R}{d' \operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen} z, \qquad p'' = \frac{R}{d \operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen} z', \qquad P'' = \frac{R}{d' \operatorname{sen} 1''},$$

y para el modelo elipsódico:

$$p'' = \frac{r}{d' \operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen} z, \quad p'' = \frac{r}{d \operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen} z',$$

$$P'' = \frac{r}{d' \operatorname{sen} 1''}, \qquad \pi'' = \frac{a}{d' \operatorname{sen} 1''}.$$

− Si consideramos en el *modelo esférico* la paralaje diurna, entonces podemos restablecer las relaciones obtenidas anteriormente para la transformación entre coordenadas topocéntricas y geocéntricas. Así, tendremos

Proposición 8.12 *Si (A,h) y (A′, h′) son las coordenadas topocéntricas y geocéntricas horizontales de un astro, entonces las expresiones de transformación entre ambas vienen dadas por*

$$\left\{\begin{array}{l} A = A', \\ \tan h = \tan h' - P \sec h', \end{array}\right.$$

siendo R el radio de la Tierra y P la paralaje horizontal esférica del astro.

Proposición 8.13 *Si (H, δ) y (H', δ') son las coordenadas topocéntricas y geocéntricas horarias de un astro, entonces las expresiones de transformación entre ambas coordenadas vienen dadas por:*

$$\frac{d}{d'}\begin{pmatrix} \cos H\ \cos\delta \\ \operatorname{sen} H\ \cos\delta \\ \operatorname{sen}\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos H'\ \cos\delta' \\ \operatorname{sen} H'\ \cos\delta' \\ \operatorname{sen}\delta' \end{pmatrix} - P\begin{pmatrix} \cos\phi \\ 0 \\ \operatorname{sen}\phi \end{pmatrix},$$

siendo ϕ la latitud del lugar de observación, R el radio de la Tierra, d y d′ las respectivas distancias topocéntrica y geocéntrica de dicho astro, y P su paralaje horizontal esférica.

Proposición 8.14 *Si (α,δ) y (α',δ') son las coordenadas topocéntricas y geocéntricas absolutas de un astro, entonces las expresiones de transformación entre las coordenadas absolutas topocéntricas y geocéntricas vienen dadas por:*

$$\frac{d}{d'}\begin{pmatrix} \cos\alpha\ \cos\delta \\ \operatorname{sen}\alpha\ \cos\delta \\ \operatorname{sen}\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha'\ \cos\delta' \\ \operatorname{sen}\alpha'\ \cos\delta' \\ \operatorname{sen}\delta' \end{pmatrix} - P\begin{pmatrix} \cos\phi\ \cos\theta \\ \cos\phi\ \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\phi \end{pmatrix},$$

siendo ϕ la latitud del lugar de observación, R el radio de la Tierra, θ la hora sidérea, d y d′ las respectivas distancias topocéntrica y geocéntrica, y P la paralaje horizontal esférica del astro.

– Veamos a continuación como son estas expresiones cuando consideramos un *modelo elipsódico terrestre.*

Proposición 8.15 *Si (A, h) y (A', h') son las coordenadas topocéntricas y geocéntricas horizontales de un astro, entonces las expresiones de transformación entre ambas vienen dadas por:*

$$\frac{d}{d'}\begin{pmatrix} \cos A\ \cos h \\ \operatorname{sen} A\ \cos h \\ \operatorname{sen} h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos A'\ \cos h' \\ \operatorname{sen} A'\ \cos h' \\ \operatorname{sen} h' \end{pmatrix} - P\begin{pmatrix} \tan(\varphi - \varphi') \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

siendo P la paralaje horizontal elipsódica del astro, φ y φ' las latitudes geodésica y geocéntrica, y d y d′ las respectivas distancias topocéntrica y geocéntrica.

Demostración. Consideremos los sistemas de referencia euclídeos topocéntrico $\{T; X, Y, Z\}$ y geocéntrico $\{G; X', Y', Z'\}$ definidos de la misma forma que en la proposición 8.1; esto

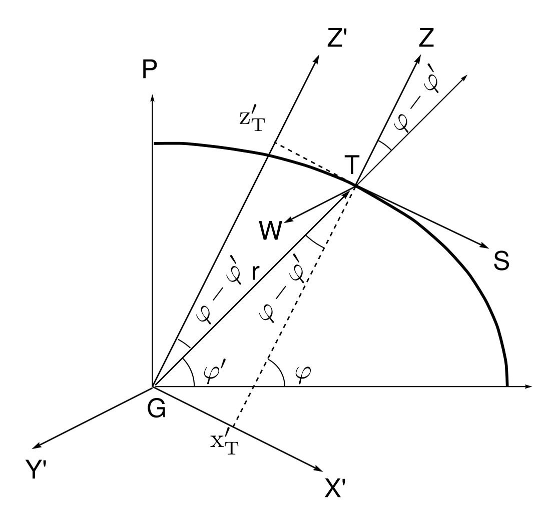


Figura 8.12: Coordenadas topocéntricas y geocéntricas horizontales en el modelo elipsódico terrestre

es, T es el lugar de observación y G el centro de masas de la Tierra, los ejes X, Y y Z están definidos por las direcciones sur (S) y oeste (W) del plano del horizonte en T, y del cénit (Z), respectivamente, los ejes X' e Y' son las direcciones paralelas a X e Y por G.

Puesto que estamos considerando un modelo elipsódico terrestre, los ejes Z' y Z, en general, no coinciden. Además, si φ y φ' son las latitudes geodésica y geocéntrica del lugar de observación, la dirección del cénit Z con la dirección determinada por el radio vector geocéntrico del lugar de observación forman un ángulo en T que es igual a $\varphi - \varphi'$.

Respecto del sistema euclídeo topocéntrico, el astro tiene las siguientes coordenadas cartesianas:

$$A_T \equiv \begin{cases} x = d \cos A \cos h, \\ y = d \operatorname{sen} A \cos h, \\ z = d \operatorname{sen} h, \end{cases}$$

y respecto del sistema geocéntrico,

$$A_G \equiv \begin{cases} x' = d' \cos A' \cos h', \\ y' = d' \operatorname{sen} A' \cos h', \\ z' = d' \operatorname{sen} h'. \end{cases}$$

Las coordenadas cartesianas del lugar de observación T respecto del sistema geocéntrico son:

$$T_G \equiv \begin{cases} x'_T = r \operatorname{sen}(\varphi - \varphi'), \\ y'_T = 0, \\ z'_T = r \cos(\varphi - \varphi'). \end{cases}$$

Aplicando la relación vectorial

$$\overline{T\,Astro} = \overline{G\,Astro} - \overline{G\,T} \Rightarrow A_T = A_G - T_G,$$

se obtiene

$$\left\{\begin{array}{l} x = x' - x'_T, \\ y = y', \\ z = z' - z'_T. \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} d\cos A\cos h = d'\cos A'\cos h' - r\,\mathrm{sen}\,(\varphi-\varphi'), \\ d\,\mathrm{sen}\,A\cos h = d'\,\mathrm{sen}\,A'\cos h', \\ d\,\mathrm{sen}\,h = d'\,\mathrm{sen}\,h' - r\cos(\varphi-\varphi'). \end{array}\right.$$

Dividiendo por d' y teniendo en cuenta que la paralaje horizontal elipsódica es $P = \frac{r}{d'}\cos(\varphi-\varphi')$, donde r es la distancia geocéntrica del lugar de observación, se tiene finalmente

$$\frac{d}{d'}\begin{pmatrix} \cos A\cos h \\ \mathrm{sen}\,A\cos h \\ \mathrm{sen}\,h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos A'\cos h' \\ \mathrm{sen}\,A'\cos h' \\ \mathrm{sen}\,h' \end{pmatrix} - P\begin{pmatrix} \tan(\varphi-\varphi') \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

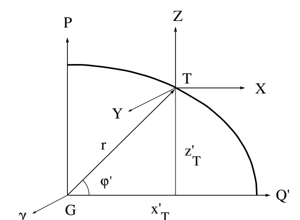


Figura 8.13

Proposición 8.16 *Si (H,δ) y (H',δ') son las coordenadas topocéntricas y geocéntricas horarias de un astro, entonces las expresiones de transformación entre ambas coordenadas vienen dadas por*

$$\frac{d}{d'}\begin{pmatrix} \cos H\cos\delta \\ \mathrm{sen}\,H\cos\delta \\ \mathrm{sen}\,\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos H'\cos\delta' \\ \mathrm{sen}\,H'\cos\delta' \\ \mathrm{sen}\,\delta' \end{pmatrix} - \frac{P}{\cos(\varphi-\varphi')}\begin{pmatrix} \cos\varphi' \\ 0 \\ \mathrm{sen}\,\varphi' \end{pmatrix},$$

siendo P la paralaje horizontal elipsódica del astro, φ' la latitud geocéntrica, y d y d' las respectivas distancias topocéntrica y geocéntrica.

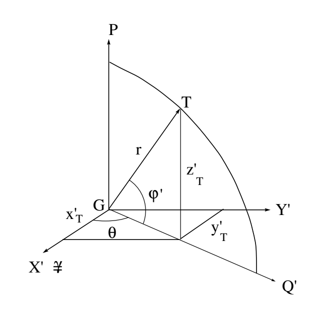


Figura 8.14

La demostración de este resultado se realiza de forma análoga a las efectuadas para las proposiciones 8.12 y 8.15, salvo que ahora las coordenadas geocéntricas del lugar de observación vienen dadas por

$$T_G \equiv \left\{\begin{array}{l} x'_T = r\cos\varphi', \\ y'_T = 0, \\ z'_T = r\,\mathrm{sen}\,\varphi'. \end{array}\right.$$

Proposición 8.17 *Si (α,δ) y (α',δ') son las coordenadas topocéntricas y geocéntricas absolutas de un astro, entonces las expresiones de transformación entre ambas vienen dadas por:*

$$\frac{d}{d'}\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\delta \\ \mathrm{sen}\,\alpha\cos\delta \\ \mathrm{sen}\,\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha'\cos\delta' \\ \mathrm{sen}\,\alpha'\cos\delta' \\ \mathrm{sen}\,\delta' \end{pmatrix} - \frac{P}{\cos(\varphi-\varphi')}\begin{pmatrix} \cos\varphi'\cos\theta \\ \cos\varphi'\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\varphi' \end{pmatrix},$$

siendo P la paralaje horizontal elipsódica del astro, φ' la latitud geocéntrica, θ la hora sidérea, y d, d' las respectivas distancias topocéntrica y geocéntrica.

La demostración se realiza de forma análoga a como se demostró la proposición 8.3, siendo las coordenadas geocéntricas del lugar de observación

$$T_G \equiv \left\{\begin{array}{l} x'_T = r\cos\varphi'\cos\theta, \\ y'_T = r\cos\varphi'\,\mathrm{sen}\,\theta, \\ z'_T = r\,\mathrm{sen}\,\varphi'. \end{array}\right.$$

Proposición 8.18 *Considerando el modelo esférico terrestre, la distancia geocéntrica d' de un astro del Sistema Solar viene dada por:*

$$d' \;=\; \frac{R\,(\operatorname{sen} z_A + \operatorname{sen} z_B)}{z_A + z_B - (\phi_A + \phi_B)},$$

siendo A y B dos lugares de la superficie terrestre situados sobre el mismo meridiano, z_A y z_B las distancias cenitales topocéntricas respectivas, ϕ_A y ϕ_B las latitudes de A y B, y R el radio de la esfera terrestre.

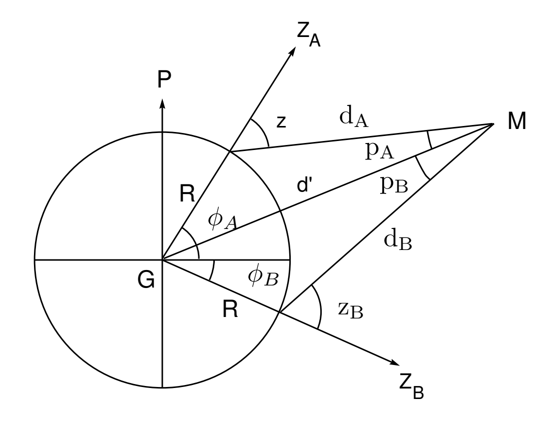


Figura 8.15: Distancias en el Sistema Solar

Demostración. Si consideramos el cuadrilátero de vértices el geocentro G, el astro M y los lugares de observación A y B entonces se cumple que:

$$p_A \,+\, p_B \,+\, (\pi - z_A) \,+\, (\pi - z_B) \,+\, \phi_A \,+\, \phi_B \;=\; 2\,\pi,$$

de donde $p_A \,+\, p_B \,-\, (z_A + z_B) \,+\, \phi_A \,+\, \phi_B \;=\; 0$.

Como $p = P \operatorname{sen} z$ y P es un valor constante para cualquier lugar de observación entonces

$$P\,\operatorname{sen} z_A \,+\, P\,\operatorname{sen} z_B \,-\, (z_A + z_B) \,+\, \phi_A \,+\, \phi_B \;=\; 0.$$

Luego

$$P \;=\; \frac{z_A + z_B - (\phi_A + \phi_B)}{\operatorname{sen} z_A + \operatorname{sen} z_B}$$

y se tiene que

$$P \;=\; \frac{R}{d'} \Rightarrow d' \;=\; \frac{R\,(\operatorname{sen} z_A + \operatorname{sen} z_B)}{z_A + z_B - (\phi_A + \phi_B)}.$$

Esta expresión se aplica cuando las distancias cenitales y las latitudes están en radianes para que así la paralaje horizontal esférica esté también lo esté. Cuando la paralaje horizontal está en segundos y, consecuentemente, también los ángulos que intervienen, se aplica la expresión

$$d' = \frac{R\,(\operatorname{sen} z_A + \operatorname{sen} z_B)}{[z_A + z_B - (\phi_A + \phi_B)]\operatorname{sen} 1''}.$$

Proposición 8.19 *Si consideramos un modelo elipsódico terrestre, entonces la distancia geocéntrica de un astro del Sistema Solar viene dada por*

$$d' = \frac{r_A \operatorname{sen} z'_A + r_B \operatorname{sen} z'_B}{z'_A + z'_B - (\varphi'_A + \varphi'_B)},$$

siendo A y B dos lugares de la superficie terrestre situados sobre el mismo meridiano, φ'_A y φ'_B las latitudes geocéntricas de A y B, z'_A y z'_B las distancias cenitales topocéntricas respectivas a las latitudes geocéntricas, y r_A y r_B las distancias geocéntricas de A y B.

Proposición 8.20 *Si consideramos un modelo elipsódico terrestre entonces la distancia geocéntrica de un astro del Sistema Solar viene dada por*

$$d' = \frac{r_A \operatorname{sen}(z_A - (\varphi_A - \varphi'_A)) + r_B \operatorname{sen}(z_B - (\varphi_B - \varphi'_B))}{z_A + z_B - (\varphi_A + \varphi_B)},$$

siendo A y B dos lugares de la superficie terrestre situados sobre el mismo meridiano, φ_A y φ_B las latitudes geodésicas de A y B, z_A y z_B las distancias cenitales topocéntricas respectivas a las latitudes geodésicas, y r_A y r_B las distancias geocéntricas de A y B.

Semidiámetro angular de un astro del Sistema Solar

Definición 8.8 *Se denomina* semidiámetro angular *(S) de un astro al ángulo subtendido desde el centro de la Tierra por el radio del astro.*

Si determinamos la distancia geocéntrica al astro y su semidiámetro angular podemos determinar el radio del astro.

Proposición 8.21 *Si consideramos el modelo esférico de la Tierra, entonces el semidiámetro angular de un astro del Sistema Solar viene dado por*

$$\operatorname{sen} S = \frac{\operatorname{sen}(z - P \operatorname{sen} z)}{\operatorname{sen} z} \operatorname{sen} s,$$

siendo z la distancia cenital topocéntrica, s el ángulo subtendido desde el lugar de observación por el radio del astro y P su paralaje horizontal.

Demostración. Si consideramos las direcciones tangentes al astro desde el lugar de observación y desde el centro de la Tierra se forman dos triángulos rectángulos cuyos vértices son el lugar de observación T, el centro del astro A y el punto de tangencia T_A; y el

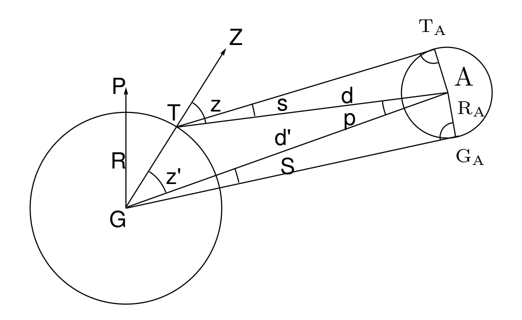


Figura 8.16: Semidiámetro angular de un astro

centro de la Tierra G, el centro del astro A y el punto de tangencia G_A, respectivamente.

Del primero de los triángulos se obtiene que

$$\operatorname{sen} s = \frac{R_A}{d} = \frac{R_A}{R}\frac{R}{d'}\frac{d'}{d} = \frac{R_A}{R} P \frac{d'}{d},$$

y del segundo,

$$\operatorname{sen} S = \frac{R_A}{d'} = \frac{R_A}{R}\frac{R}{d'} = \frac{R_A}{R} P,$$

siendo d y d' las distancias topocéntrica y geocéntrica del astro, R el radio de la Tierra, R_A el radio del astro y P la paralaje horizontal del mismo.

Por tanto, $\operatorname{sen} s = \operatorname{sen} S \frac{d'}{d} \Rightarrow \operatorname{sen} S = \frac{d}{d'} \operatorname{sen} s$.

Aplicando el teorema del seno al triángulo $\triangle TAG$ se tiene

$$\frac{d'}{\operatorname{sen}(180^{\circ} - z)} = \frac{d}{\operatorname{sen} z} \Rightarrow \frac{d}{d'} = \frac{\operatorname{sen} z'}{\operatorname{sen} z},$$

siendo z y z' las distancias cenitales topocéntrica y geocéntrica del astro.

Luego, $\operatorname{sen} S = \frac{\operatorname{sen} z'}{\operatorname{sen} z} \operatorname{sen} s = \frac{\operatorname{sen}(z-p)}{\operatorname{sen} z} \operatorname{sen} s = \frac{\operatorname{sen}(z - P \operatorname{sen} z)}{\operatorname{sen} z} \operatorname{sen} s$.

Cuando se realizan observaciones del Sol, de la Luna o de planetas del Sistema Solar se observa el borde para posteriormente reducir dichas observaciones al centro del astro mediante su semidiámetro angular.

8.1.4. Paralaje anua

Si pudiéramos observar un astro desde el centro de la Tierra y desde el centro del Sol, se comprobaría que ambas direcciones son distintas. Así, cuando se realice un cambio entre coordenadas geocéntricas y heliocéntricas esta diferencia habrá de tenerse en cuenta.

Definición 8.9 *Se denomina paralaje anua* (ω) *de un astro al mayor ángulo subtendido por la distancia entre el Sol y la Tierra.*

Debido a que la distancia Sol-Tierra es muy pequeña respecto a las distancias geocéntrica y heliocéntrica de astros no pertenecientes al Sistema Solar, se asumirá que para dichos astros la órbita de la Tierra es circular y de radio igual al semieje mayor de la órbita elíptica.

Proposición 8.22 *La paralaje anua de un astro viene dada por*

$$\omega = \frac{ST}{d'},$$

siendo ST *la distancia entre el Sol y la Tierra y* d' *la distancia geocéntrica del astro.*

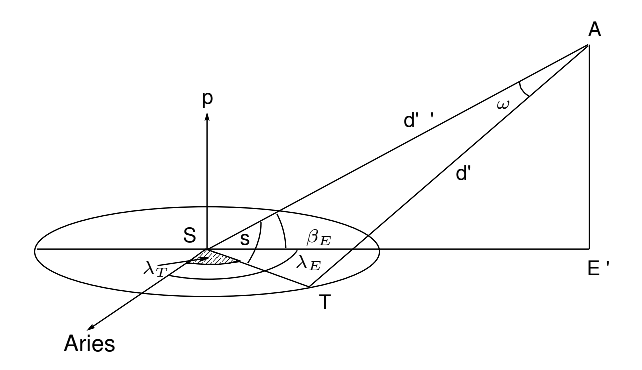


Figura 8.17: Paralaje anua

Demostración. Consideremos el triángulo plano de vértices el astro A, el baricentro del Sistema Solar, que coincide aproximadamente con el centro del Sol S y el centro de masas de la Tierra T.

Aplicando el teorema del seno a este triángulo se tiene:

$$\frac{\operatorname{sen}\omega}{ST} = \frac{\operatorname{sen}\sigma}{d'} \Rightarrow \operatorname{sen}\omega = \operatorname{sen}\sigma \frac{ST}{d'},$$

siendo σ y ω los ángulos correspondientes a los vértices S y A.

El seno de ω tendrá su máximo valor cuando $\sigma = 90^{\circ}$, y por tanto $\operatorname{sen}\omega = \frac{ST}{d'}$.

Finalmente, al ser la paralaje anua un ángulo muy pequeño ($< 1''$) podemos aproximar el seno de este ángulo por el ángulo en radianes:

$$\omega = \frac{ST}{d'}.$$

La paralaje anua en segundos vendrá dada por

$$\omega'' = \frac{ST}{d' \operatorname{sen} 1''},$$

y si aproximamos la distancia geocéntrica d' por la distancia heliocéntrica d'' del astro,

$$\omega'' = \frac{ST}{d'' \operatorname{sen} 1''}.$$

Proposición 8.23 *Sean (λ_A, β_A) y $(\lambda_T, 0^o)$ las coordenadas eclípticas de un astro y de la Tierra, respectivamente. Debido a la traslación de la Tierra alrededor del Sol se tiene que:*

i) *Si $\lambda_T = \lambda_A$ entonces $\sigma = \beta_A \Rightarrow \omega = min.$*

ii) *Si $\lambda_T = \lambda_A + 90^o$ entonces $\sigma = 90^o \Rightarrow \omega = max.$*

iii) *Si $\lambda_T = \lambda_A + 180^o$ entonces $\sigma = 180^o - \beta_A \Rightarrow \omega = min.$*

iv) *Si $\lambda_T = \lambda_A + 270^o$ entonces $\sigma = 90^o \Rightarrow \omega = max.$*

La paralaje anua demuestra la teoría heliocéntrica del Sistema Solar, pues las direcciones geocéntricas de un astro varían a lo largo de un año.

Proposición 8.24 *Si (α,δ) y (α',δ') son las coordenadas geocéntricas y heliocéntricas absolutas de un astro, entonces las expresiones de transformación entre dichas coordenadas vienen dadas por:*

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha \, \cos\delta \\ \operatorname{sen}\alpha \, \cos\delta \\ \operatorname{sen}\delta \end{pmatrix} = \frac{d''}{d'} \begin{pmatrix} \cos\alpha' \, \cos\delta' \\ \operatorname{sen}\alpha' \, \cos\delta' \\ \operatorname{sen}\delta' \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} \cos\lambda_\odot \\ \operatorname{sen}\lambda_\odot \, \cos\epsilon \\ \operatorname{sen}\lambda_\odot \, \operatorname{sen}\epsilon \end{pmatrix},$$

siendo ω la paralaje anua del astro, $\lambda_\odot$ la longitud eclíptica geocéntrica del Sol, d' y d'' las respectivas distancias geocéntrica y heliocéntrica de dicho astro, y ϵ la oblicuidad de la eclíptica.

Proposición 8.25 *Sean (α,δ) y (α',δ') las coordenadas geocéntricas y heliocéntricas absolutas de un astro. Entonces las diferencias aproximadas entre ambas coordenadas, producidas por la paralaje anua, vienen dadas por las expresiones:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta\alpha \,=\, \alpha' - \alpha \,= & & -\,\omega'' \sec\delta \,(\operatorname{sen}\alpha \, \cos\lambda_S \,-\, \cos\epsilon \, \cos\alpha \, \operatorname{sen}\lambda_S) \\ \Delta\delta \,=\, \delta' - \delta \,= & & -\,\omega'' \,(\operatorname{sen}\epsilon \, \operatorname{sen}\lambda_S \, \cos\delta \,-\, \operatorname{sen}\delta \, \cos\lambda_S \, \cos\alpha - \\ & & -\cos\epsilon \, \operatorname{sen}\delta \, \operatorname{sen}\lambda_S \, \operatorname{sen}\alpha) \end{array} \right.$$

Proposición 8.26 *Si (λ,β) y (λ',β') son las coordenadas geocéntricas y heliocéntricas eclípticas de un astro, entonces las expresiones de transformación entre ambas vienen dadas por:*

$$\begin{pmatrix} \cos\lambda \, \cos\beta \\ \operatorname{sen}\lambda \, \cos\beta \\ \operatorname{sen}\beta \end{pmatrix} = \frac{d''}{d'} \begin{pmatrix} \cos\lambda' \, \cos\beta' \\ \operatorname{sen}\lambda' \, \cos\beta' \\ \operatorname{sen}\beta' \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} \cos\lambda_\odot \\ \operatorname{sen}\lambda_\odot \\ 0 \end{pmatrix},$$

siendo ω la paralaje anua del astro, $\lambda_\odot$ la longitud eclíptica geocéntrica del Sol, y d' y d'' las respectivas distancias geocéntrica y heliocéntrica de dicho astro.

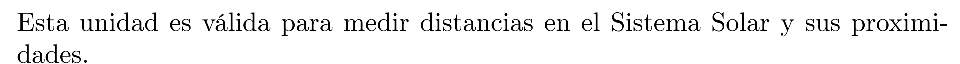
Proposición 8.27 *Sean (λ,β) y (λ',β') las coordenadas geocéntricas y heliocéntricas eclípticas de un astro. Entonces las diferencias aproximadas entre ambas coordenadas, producidas por la paralaje anua, vienen dadas por las expresiones:*

$$\begin{cases} \Delta\lambda \,=\, \lambda' - \lambda \,=\, -\,\omega'' \operatorname{sen}(\lambda_\odot - \lambda) \sec\beta \\ \Delta\beta \,=\, \beta' - \beta \,=\, -\,\omega'' \cos(\lambda_\odot - \lambda) \operatorname{sen}\beta \end{cases}$$

Nuevas unidades de distancia

Al ser la órbita de la tierra alrededor del Sol una elipse con éste en uno de sus focos, la distancia entre ambos no es constante. El punto de esta órbita más próximo al Sol se denomina *perihelio*, y el más distante *afelio*. Obviamente, ambos puntos son los extremos del semieje mayor. No obstante, en la mayoría de las situaciones astronómicas se considerará una órbita circular cuyo radio es la distancia media de las distancias entre el Sol y la Tierra. Si consideramos la órbita elíptica "aparente" del Sol alrededor de la Tierra, donde la Tierra está en uno de los focos, a los puntos del semieje mayor más próximo y más alejado de la Tierra se denominan *perigeo* y *apogeo*, respectivamente.

Definición 8.10 *Se llama unidad astronómica (UA) a la distancia media existente entre el Sol y la Tierra, siendo aproximadamente igual a* 149598000 *Kms.*



Esta unidad es válida para medir distancias en el Sistema Solar y sus proximidades.

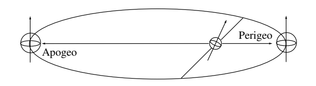
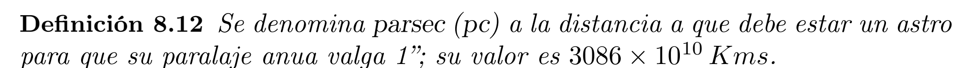


Figura 8.18

Definición 8.11 *Se denomina año-luz (A-L) a la distancia recorrida por la luz en un año, siendo su valor aproximadamente* $9{,}46 \times 10^{12}$ *Kms.*

Se considera que el valor de la velocidad de la luz es $300000\,Km/seg$.

Definición 8.12 *Se denomina parsec (pc) a la distancia a que debe estar un astro para que su paralaje anua valga 1"; su valor es* $3086 \times 10^{10}\,Kms$.



Proposición 8.28 *La equivalencia del parsec con la unidad astronómica y con el año luz es*

$$1\,pc \,=\, 206265\,UA \,=\, 3{,}26 A\text{-}L$$

La estrella más próxima al Sol es α-Centauro, que se encuentra a 1,31 parsec. La estrella Sirio, que es la más brillante del hemisferio norte celeste, se encuentra a 2,7 parsec.



8.2. Precesión y nutación

Debido al abultamiento ecuatorial de la Tierra, las fuerzas externas que actúan sobre la Tierra en rotación producen un desplazamiento en sentido retrógrado del eje terrestre, generando una variación de los planos fundamentales que definen los sistemas ecuatorial y eclíptico.

Aunque en temas anteriores hemos considerado que tanto las coordenadas absolutas y eclípticas de un astro como la oblicuidad de la eclíptica son constantes, la variación que experimentan el ecuador celeste y la eclíptica como consecuencia de la variación del eje celeste, supondrá que dichos valores varían a lo largo del tiempo.

En el estudio del movimiento del eje de rotación terrestre distinguiremos dos movimientos superpuestos: la precesión y la nutación.

8.2.1. Precesión de los equinoccios

Las fuerzas externas que actúan sobre la Tierra se deben a la acción gravitatoria del Sol y de la Luna, que afecta al plano del ecuador terrestre, y a los planetas del Sistema Solar, que afectan al plano de la eclíptica. La variación de estos planos hace que el punto Aries, definido como intersección del ecuador celeste y de la eclíptica, también varíe.

Este fenómeno, denominado *precesión*, fue descubierto por Hiparco en el siglo II a.d.C. comparando la longitud eclíptica ($174^{\circ}7'30''$) de la estrella α-Virgo con la obtenida ($172^{\circ}41'6''$) por Timocharis 144 años antes. Hiparco comprobó que la longitud eclíptica de cualquier astro de la esfera celeste aumentaba a razón de $36''$ por año y, sin embargo, la latitud eclíptica permanecía constante.

Apoyándose en sus observaciones, Hiparco interpreta la precesión como un movimiento de rotación de la esfera celeste en sentido directo alrededor del eje de la eclíptica que permanece fijo. De este modo, la longitud eclíptica de todas las estrellas aumenta $36''$ por año.

Copérnico explica que para que la variación angular en longitud eclíptica sea igual tanto para estrellas próximas como para estrellas lejanas, éstas últimas han de poseer unas velocidades inconcebiblemente enormes, estableciendo que, además de estar fijo el eje de la eclíptica, la dirección del eje de rotación terrestre –eje celeste– no permanece fijo en el espacio, sino que describe un cono de revolución alrededor del eje de la eclíptica en sentido retrógrado, permaneciendo constante el ángulo –oblicuidad de la eclíptica– determinado entre ambos ejes.

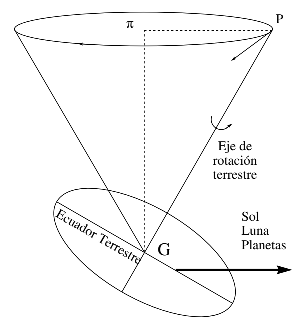


Figura 8.19: Movimiento del eje de rotación terrestre alrededor del eje de la eclíptica

Las trayectorias de los polos norte y sur celestes alrededor de los polos norte y sur eclíptico son dos círculos menores de latitud eclíptica $90^{\circ} - \varepsilon$ y $-(90^{\circ} - \varepsilon)$, respectivamente.

En cada instante, este movimiento retrógrado del eje celeste determina un ecuador celeste distinto y, por tanto, su intersección con la eclíptica será también diferente. De este modo, el punto Aries se moverá sobre la eclíptica en sentido retrógrado a la misma velocidad angular que el eje celeste.

Finalmente, Newton explica que la precesión está causada por la atracción gravitatoria del Sol, de la Luna y de los planetas del Sistema Solar sobre el abultamiento ecuatorial terrestre.

Maskeline, en 1802, vuelve a observar la estrella α-Virgo obteniendo para su

longitud eclíptica $\lambda = 201°4'41''$, estableciendo la precesión en $50''$ por año. En la actualidad se asume el valor de la precesión en $50''2909$ por año, por lo que el punto Aries recorrerá la eclíptica al cabo de aproximadamente 26000 años. Asimismo, el período de revolución de los polos celestes alrededor de los polos de la eclíptica será también 26000 años.

Definición 8.13 *Se denomina* precesión lunisolar *al efecto de la atracción conjunta del Sol y la Luna sobre el abultamiento ecuatorial terrestre.*

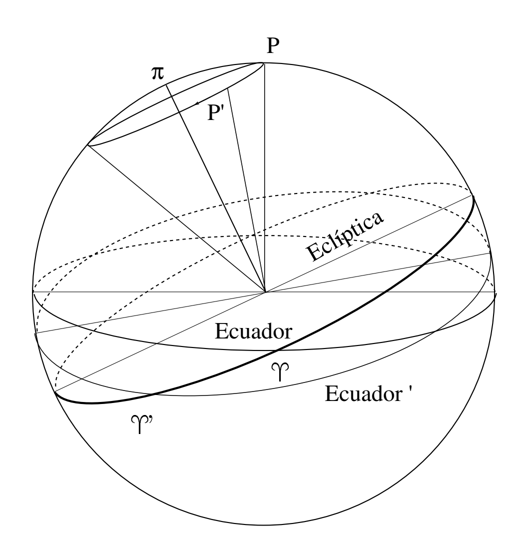


Figura 8.20: Precesión lunisolar

La precesión lunisolar produce un movimiento del ecuador terrestre de carácter secular que arrastra al eje de rotación. Consecuentemente, el eje celeste describe un cono alrededor del eje de la eclíptica en sentido retrógrado con período de 26000 años. Debido a este fenómeno, el punto Aries tiene un movimiento retrógrado sobre la eclíptica de 50"2909 por año.

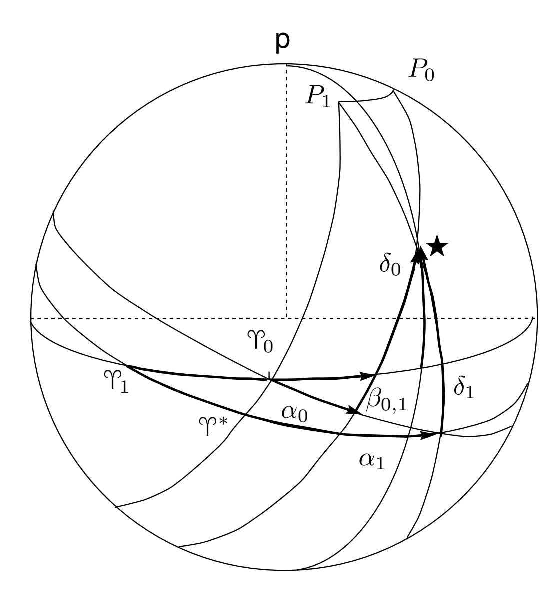
Definición 8.14 *Si tenemos en cuenta el movimiento secular del ecuador terrestre producido por el fenómeno de la precesión lunisolar, se denomina* ecuador medio *a la intersección del plano que contiene al ecuador terrestre en un determinado instante con la esfera celeste, y* eje celeste medio *a la dirección perpendicular por el centro de la esfera celeste al ecuador medio. La intersección del eje medio con la esfera celeste serán los* polos norte y sur medios. *A las coordenadas absolutas referidas a un ecuador y eje celeste medios se denominan* coordenadas absolutas medias.

Proposición 8.29 *Las variaciones, en función del tiempo, de las coordenadas ecuatoriales absolutas de un astro debidas a la precesión lunisolar vienen dadas*

por

$$\begin{cases} d\alpha = (n \tan\delta \operatorname{sen}\alpha + m)\, dt, \\ d\delta = n \cos\alpha\, dt, \end{cases}$$

siendo (α, δ) *las coordenadas absolutas en un determinado instante inicial,* $n \simeq 20''0 = 1^s34$ *y* $m \simeq 46''1 = 3^s07$.



<u>Demostración</u>. Como la precesión lunisolar sólo afecta al plano del ecuador, tanto el plano de la eclíptica como la oblicuidad de la eclíptica permanecen invariables a lo largo del tiempo.

En un instante inicial t_0 y en un instante posterior t_1 se tendrán diferentes posiciones del ecuador celeste y del eje celeste. Puesto que la latitud eclíptica permanece constante, en ambos instantes se tienen los siguientes elementos medios:

$$\begin{cases} \Upsilon_0 = \Upsilon(t_0), \\ P_0 = P(t_0), \\ (\alpha_0, \delta_0) = (\alpha(t_0),\, \delta(t_0)), \\ (\lambda_0, \beta_0) = (\lambda(t_0),\, \beta_0), \end{cases} \qquad \begin{cases} \Upsilon_1 = \Upsilon(t_1), \\ P_1 = P(t_1), \\ (\alpha_1, \delta_1) = (\alpha(t_1),\, \delta_1 = \delta(t_1)), \\ (\lambda_1, \beta_1) = (\lambda(t_1),\, \beta_0). \end{cases}$$

Consideremos el triángulo esférico determinado por las posiciones del punto Aries Υ_0 y Υ_1, que corresponden a los instantes t_0 y t_1, y el punto Υ^* que es la intersección del ecuador medio para el instante t_1 con el meridiano que pasa por el punto Υ_0. Los vértices Υ_0 y Υ_1 pertenecen a la eclíptica. Debido a esta construcción, el ángulo correspondiente al vértice Υ^* es recto, y el correspondiente al vértice Υ_1 es la oblicuidad de la eclíptica.

Los lados opuestos a los ángulos Υ_0, Υ_1 y Υ^*, y que denotamos por $d\mu$, dj y $d\lambda$, se denominan precesión en ascensión recta, en declinación y en longitud, respectivamente.

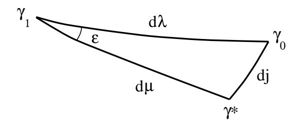


Figura 8.21

Teniendo en cuenta que estos lados son muy pequeños, podemos realizar una aproximación plana de este triángulo, de forma que:

$$dj = \Upsilon_0\Upsilon^* = \Upsilon_0\Upsilon_1 \operatorname{sen}\varepsilon = d\lambda \operatorname{sen}\varepsilon,$$
$$d\mu = \Upsilon_1\Upsilon^* = \Upsilon_0\Upsilon_1 \cos\varepsilon = d\lambda \cos\varepsilon.$$

Puesto que estas variaciones dependen del tiempo se tiene que

$$\frac{dj}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \operatorname{sen}\varepsilon, \quad \frac{d\mu}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \cos\varepsilon.$$

Realizando observaciones del punto Aries, se determina que

$$\frac{dj}{dt} = n \simeq 20''0 = 1^s 34, \ \frac{d\mu}{dt} = m \simeq 46''1 = 3^s 07.$$

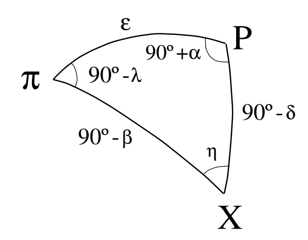


Figura 8.22

La 1^a, 2^a y 3ª fórmulas de Bessel aplicadas al triángulo de posición de la estrella $P\pi X$ proporcionan las expresiones

$$\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}\beta \cos\varepsilon + \cos\beta \operatorname{sen}\varepsilon \operatorname{sen}\lambda, \tag{30}$$
$$\cos\delta \cos\alpha = \cos\beta \cos\lambda, \tag{31}$$
$$\cos\delta \operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\varepsilon + \cos\beta \cos\varepsilon \operatorname{sen}\lambda. \tag{32}$$

Teniendo en cuenta que, por hipótesis, $d\beta = d\varepsilon = 0$, diferenciando la expresión (30) se tiene que

$$\cos\delta \, d\delta = \cos\beta \operatorname{sen}\varepsilon \cos\lambda \, d\lambda \Leftrightarrow \frac{d\delta}{dt} = \frac{\cos\beta \operatorname{sen}\varepsilon \cos\lambda}{\cos\delta} \frac{d\lambda}{dt}, \tag{33}$$

y de la expresión (31) se obtiene que

$$\frac{d\delta}{dt} = \cos\alpha \operatorname{sen}\varepsilon \frac{d\lambda}{dt} = n \cos\alpha \Leftrightarrow d\delta = n \cos\alpha \, dt. \tag{34}$$

Con las mismas hipótesis anteriores, si diferenciamos la expresión (32), tenemos

$$\cos\delta \cos\alpha \, d\alpha - \operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}\alpha \, d\delta = \cos\beta \cos\varepsilon \cos\lambda \, d\lambda,$$

que equivale a

$$\cos\delta \cos\alpha \frac{d\alpha}{dt} - \operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}\alpha \frac{d\delta}{dt} = \cos\beta \cos\varepsilon \cos\lambda \frac{d\lambda}{dt}.$$

Luego

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}\alpha}{\cos\delta \cos\alpha} \frac{d\delta}{dt} + \frac{\cos\beta \cos\varepsilon \cos\lambda}{\cos\delta \cos\alpha} \frac{d\lambda}{dt}.$$

Utilizando las expresiones (31) y (34) nos queda finalmente

$$\frac{d\alpha}{dt} = \tan\delta \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} n \cos\alpha + \cos\varepsilon \frac{d\lambda}{dt} =$$
$$= n \tan\delta \operatorname{sen}\alpha + m \Leftrightarrow d\alpha = (n \tan\delta \operatorname{sen}\alpha + m) \, dt.$$

Las coordenadas absolutas medias (α, δ) de un astro en un instante determinado t vienen dadas por las relaciones

$$\begin{cases} \alpha \,=\, \alpha_0 \,+\, d\alpha \,=\, n\, \cos \alpha_0\, dt, \\ \delta \,=\, \delta_0 \,+\, d\delta \,=\, (n\, \tan \delta_0\, \operatorname{sen} \alpha_0 \,+\, m)\, dt, \end{cases}$$

siendo (α_0, δ_0) las coordenadas medias para un instante inicial arbitrario t_0 y $dt = t - t_0$ en años. En 1985 se fijó como época inicial de referencia el 1 de Enero del año 2000.

Corolario 8.3 *Las variaciones de las coordenadas absolutas de un astro debida a la precesión lunisolar vienen dadas por*

$$\begin{cases} d\alpha \,=\, 50''2909\, (\cos \varepsilon \,+\, \operatorname{sen} \varepsilon\, \operatorname{sen} \alpha\, \operatorname{sen} \delta\,)\, dt, \\ d\delta \,=\, 50''2909\, \operatorname{sen} \varepsilon\, cos\alpha\, dt, \end{cases}$$

y las variaciones de las coordenadas eclípticas, por

$$\begin{cases} d\lambda \,=\, 50''2909\, dt, \\ d\beta \,=\, 0, \end{cases}$$

siendo (α, δ) las coordenadas absolutas en el año 2000.0, $dt = t - 2000{,}0$ en años y $\varepsilon = 23^o 26' 21'' 448$.

Definición 8.15 *La atracción de los planetas sobre el abultamiento ecuatorial terrestre se denomina* precesión planetaria.

Este fenómeno afecta al plano de la eclíptica, de forma que en cada instante variará su posición sobre la esfera celeste. Sin embargo, el efecto sobre el eje de rotación terrestre puede considerarse despreciable. La variación producida por la precesión planetaria sobre la oblicuidad de la eclíptica se englobará en el estudio de los efectos nutacionales.

Proposición 8.30 *Las variaciones debidas a la precesión planetaria en las coordenadas absolutas vienen dadas por*

$$\begin{cases} d\alpha \,=\, -\, 0''1055\, dt, \\ d\delta \,=\, 0, \end{cases}$$

y en las coordenadas eclípticas, por

$$\begin{cases} d\lambda \,=\, (\,-\, 0''1055\, \cos \varepsilon \,+\, 0''4700\, \tan \beta\, \cos (175^o - \lambda))\, dt, \\ d\beta \,=\, 0''4700\, \operatorname{sen} (175^o - \lambda)\, dt, \end{cases}$$

siendo (λ, β) las coordenadas eclípticas de la estrella en el año 2000.0, $dt = t - 2000{,}0$ en años y $\varepsilon \,=\, 23^o 26' 21'' 448$.

Definición 8.16 *Se denomina eclíptica media a la intersección del plano de la eclíptica en un determinado instante con la esfera celeste. Las coordenadas eclípticas referidas a la eclíptica media se denominan* coordenadas eclípticas medias.

Definición 8.17 *La precesión general es el efecto producido por el conjunto de las atracciones del Sol, de la Luna y de los planetas del Sistema Solar sobre el abultamiento ecuatorial de la Tierra.*

La precesión general hace que en un determinado instante se tengan un ecuador medio y una eclíptica media cuya intersección determina un punto Aries medio.

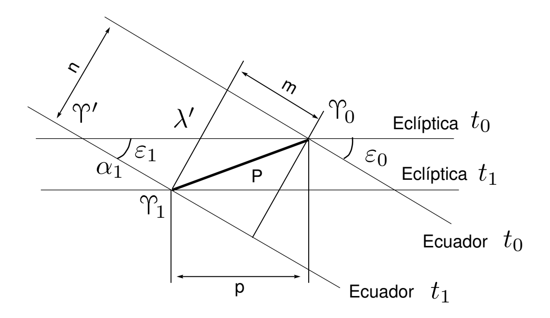


Figura 8.23: Precesión general

Definición 8.18 *Considerando el ecuador y la eclíptica en dos instantes t_0 y t_1 podemos definir los siguientes elementos:*

Υ_0 ... *Intersección entre la eclíptica y el ecuador en el instante t_0.*

Υ_1 ... *Idem para t_1.*

Υ' ... *Intersección entre la eclíptica correspondiente al instante t_0 y el ecuador en el instante t_1.*

Precesión planetaria en ascensión recta ... $\alpha_1 = \Upsilon'\Upsilon_1$.

Precesión lunisolar en longitud ... $\lambda' = \Upsilon_0\Upsilon'$.

Precesión general en longitud (p) ... *Longitud eclíptica del punto Υ_0 respecto a Υ_1.*

Precesión general en ascensión recta (m) ... *Ascensión recta del punto Υ_0 respecto a Υ_1.*

Precesión general en declinación (n) ... *Declinación del Υ_0 respecto del ecuador en el instante t_1.*

Proposición 8.31 *Las precesiones generales en longitud, en ascensión recta y en*

declinación en un instante determinado vienen dadas por

$$\begin{cases} p \,=\, \lambda' \,-\, \alpha_1 \,\cos\varepsilon, \\ m \,=\, \lambda' \,\cos\varepsilon \,-\, \alpha_1, \\ n \,=\, \lambda' \,\operatorname{sen}\varepsilon, \end{cases}$$

siendo la oblicuidad de la eclíptica constante e igual a $\varepsilon = 23^o 26' 21'' 448$.

Los valores de todos estos parámetros, para un determinado instante t, pueden calcularse mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 50''3878 \,+\, 0''0049\,T, \\ \lambda' &= 0''1055 \,-\, 0''0189\,T, \\ p &= 50''2909 \,+\, 0''0222\,T, \\ m &= 46''1243 \,+\, 0''0279\,T, \\ n &= 20''0431 \,-\, 0''0085\,T, \end{aligned}$$

donde $T = \dfrac{t - 2000}{100}$.

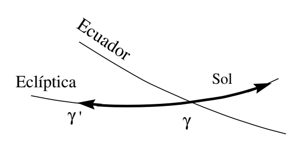


Figura 8.24: Movimiento retrógrado de Aries sobre la eclíptica

Proposición 8.32 *Las variaciones producidas por la precesión general en las coordenadas absolutas de una estrella vienen dadas por*

$$\begin{cases} d\alpha \,=\, (n\,\tan\delta\,\operatorname{sen}\alpha \,+\, m)\,dt, \\ d\delta \,=\, n\,\cos\alpha\,dt, \end{cases}$$

y en las coordenadas eclíptica por

$$\begin{cases} d\lambda \,=\, (\,p \,+\, 0''4700\,\tan\beta\,\cos(175^o - \lambda))\,dt, \\ d\beta \,=\, 0''4700\,\operatorname{sen}(175^o - \lambda)\,dt, \end{cases}$$

siendo (α, δ) *y* (λ, β) *las coordenadas absolutas y eclípticas de la estrella en el año 2000.0,* $dt = t - 2000{,}0$ *en años,* p *la precesión general en longitud,* m *la precesión general en ascensión recta y* n *la precesión general en declinación.*



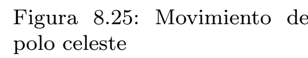


Figura 8.25: Movimiento del polo celeste

Debido a la precesión se producen las siguientes consecuencias:

- El año trópico, definido como el intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol por el punto Aries, no dura exactamente el tiempo equivalente a 360º, pues, debido a la precesión, el punto Aries se habrá desplazado en sentido retrógrado unos $50''$ sobre la eclíptica, lo que unido al movimiento en sentido directo del Sol, hará que éste se encuentre con el punto Aries al cabo de $359^o 59' 10''$.
- Actualmente, identificamos la estrella polar o dirección del polo norte celeste con la dirección de la estrella α-Osa Menor. Esta dirección no es invariable a lo largo del tiempo debido a los cambios de dirección que el eje de rotación terrestre experimenta como efecto de la precesión, de modo que hace 4000 años la estrella polar era la α-Dragón, mientras que dentro de 8000 años será la α-Cisne y dentro de 12000 años será Vega (α-Lira).

- El zodiaco se establece dividiendo la eclíptica en 12 partes iguales, asignando los nombres de cada zona por la constelación sobre la que se proyecta el Sol en las fechas correspondientes. La precesión del punto Aries hace que esta constelación vaya variando a lo largo del tiempo. Por tanto, aunque se continúe diciendo que el Sol el 21 de marzo está en Aries, esto realmente no es así. En la actualidad, la constelación sobre la que se proyecta el Sol cuando $\alpha_{\odot} = 0^h, \delta_{\odot} = 0^o$ es Acuario.

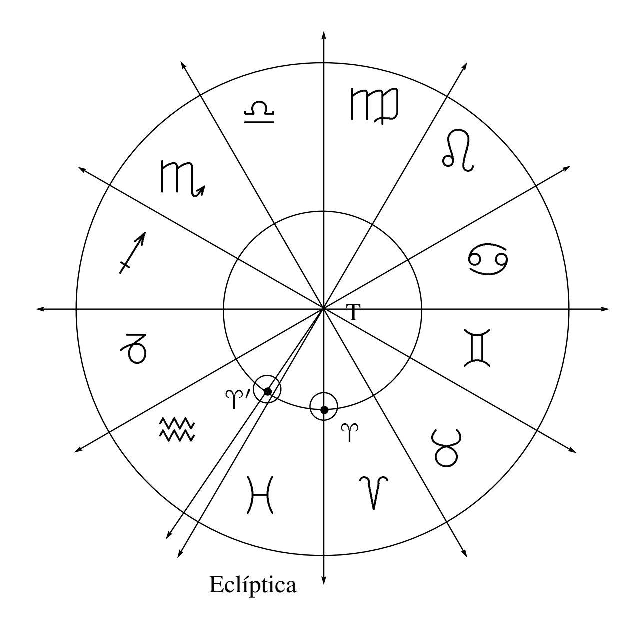


Figura 8.26: El zodiaco y la precesión

8.2.2. Nutación

A pesar de que históricamente se había observado una lenta disminución en el valor de la oblicuidad de la eclíptica –Al Battani (880) $23^o35'$, Tycho Brahé (1590) 23° 30'–, esta variación se achacaba a errores experimentales.

En el siglo XVII se empieza a dudar de la invariabilidad de la oblicuidad de la eclíptica, hasta que años más tarde, Euler, al desarrollar la teoría de las perturbaciones de los planetas sobre el movimiento de traslación de la Tierra, demuestra que el plano de la eclíptica no es fijo, decreciendo la oblicuidad de la eclíptica a razón de $46''$ por siglo.

En 1729, Bradley descubre que el eje de rotación terrestre no sólo tenía un movimiento de largo período –precesión– considerado hasta esos momentos, sino que además existía un movimiento de corto período superpuesto al anterior y que producía la variación de la oblicuidad de la eclíptica.

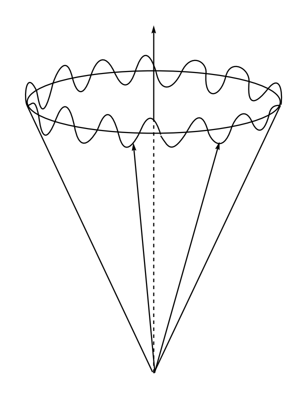


Figura 8.27: Nutación

Este movimiento, denominado *nutación*, tiene un período de 18.66 años haciendo que el polo celeste describa una elipse en sentido retrógrado, denominada *elipse de nutación*, cuyo centro –polo medio– es el que recorre el círculo de precesión alrededor del eje de la eclíptica. El eje mayor de esta elipse está en la dirección del polo de la eclíptica y su valor es 18"4 y el eje menor está sobre el círculo de precesión valiendo 13"7. Al valor del semieje mayor, 9"21, se le denomina constante de nutación.

Definición 8.19 *Se llaman eje terrestre verdadero al eje de rotación terrestre afectado de precesión y nutación,* eje celeste verdadero *al eje terrestre verdadero prolongado hasta la esfera celeste,* polo verdadero *a la intersección del eje celeste verdadero con la esfera celeste,* ecuador verdadero *al plano perpendicular al eje celeste verdadero por el centro de la esfera celeste y* equinoccio verdadero *a la intersección de la eclíptica media y el ecuador verdadero.*

La composición de la precesión y la nutación hacen describir al polo verdadero una línea sinuosa en torno al polo medio de la eclíptica.

Definición 8.20 *Se denominan* coordenadas verdaderas *de un astro a las coordenadas astronómicas referidas al equinoccio y al ecuador verdaderos.*

Experimentalmente se obtiene que la oblicuidad de la eclíptica para un instante determinado t en años viene dada por

$$\varepsilon = 23^o 26' 21'' 448 \; - \; 46'' 815 \, T \; - \; 0'' 001 \, T^2, \tag{35}$$

siendo $T = \dfrac{t - 2000}{100}$.

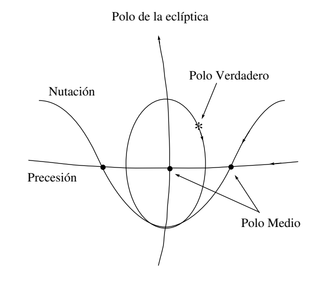


Figura 8.28: Polos celestes medio y verdadero

La nutación, o desplazamiento del polo verdadero con respecto al polo medio, puede descomponerse en nutación en longitud ($\Delta\psi$) y nutación en oblicuidad ($\Delta\varepsilon$). Los valores de estas componentes para un día determinado se calculan por medio de las expresiones siguientes:

$$\Delta\psi = -\,0^o 0048 \text{ sen}\,(125^o - 0^o 05295\, d) - \, 0^o 0004 \text{ sen}\,(200^o 9 + 1^o 97129\, d), \tag{36}$$

$$\Delta\varepsilon = +\,0^o 0026 \cos\,(125^o - 0^o 05295\, d) + \, 0^o 0002 \cos\,(200^o 9 + 1^o 97129\, d), \tag{37}$$

siendo d la diferencia en días con el día 1 de enero del año 2000 que equivale, como veremos posteriormente, a 2451545,0 días julianos.

Proposición 8.33 *En un determinado instante, las correcciones en las coordenadas absolutas de un astro por nutación en longitud vienen dadas por*

$$\begin{cases} d\alpha \;=\; \Delta\psi\,(\cos\varepsilon \,+\, \text{sen}\,\varepsilon \,\text{sen}\,\alpha\, \tan\delta), \\ d\delta \;=\; \Delta\psi \,\text{sen}\,\varepsilon\, \cos\alpha, \end{cases}$$

y por nutación en oblicuidad, por

$$\begin{cases} d\alpha \;=\; -\,\Delta\varepsilon\, \cos\alpha\, \tan\delta, \\ d\delta \;=\; \Delta\epsilon \,\text{sen}\,\alpha, \end{cases}$$

donde (α, δ) son las coordenadas medias y ε, $\Delta\psi$ y $\Delta\varepsilon$ están calculados mediante las expresiones (35), (36) y (37).

Puesto que estas correcciones son muy pequeñas, la corrección total por nutación es la superposición de ambas correcciones

$$\begin{cases} d\alpha \,=\, \Delta\psi\,(\cos\varepsilon \,+\, \operatorname{sen}\varepsilon\,\operatorname{sen}\alpha\,\tan\delta) \,-\, \Delta\varepsilon\,\cos\alpha\,\tan\delta, \\ d\delta \,=\, \Delta\psi\,\operatorname{sen}\varepsilon\,\cos\alpha \,+\, \Delta\epsilon\,\operatorname{sen}\alpha. \end{cases}$$

A modo de resumen, podemos indicar que corrigiendo las coordenadas absolutas de un astro referidas al año 2000.0, $(\alpha_{2000,0}, \delta_{2000,0})$, por precesión se obtienen las coordenadas medias (α_M, δ_M) y corrigiendo éstas por nutación se obtienen sus coordenadas verdaderas (α_V, δ_V), esto es

$$\begin{cases} \alpha_M \,=\, \alpha_{2000,0} \,+\, (n\,\tan\delta_{2000,0}\,\operatorname{sen}\alpha_{2000,0} \,+\, m)\,(t - 2000{,}0), \\ \delta_M \,=\, \delta_{2000,0} \,+\, n\,\cos\alpha_{2000,0}\,(t - 2000{,}0), \end{cases}$$

siendo

$$m \,=\, 46''1243 \,+\, 0''0279\,\frac{t-2000}{100}, \quad n = 20''0431 \,-\, 0''0085\,\frac{t-2000}{100},$$

y

$$\begin{cases} \alpha_V \,=\, \alpha_M \,+\, \Delta\psi\,(\cos\varepsilon \,+\, \operatorname{sen}\varepsilon\,\operatorname{sen}\alpha_M\,\tan\delta_M) \,-\, \Delta\varepsilon\,\cos\alpha_M\,\tan\delta_M, \\ \delta_V \,=\, \delta_M \,+\, \Delta\psi\,\operatorname{sen}\varepsilon\,\cos\alpha_M \,+\, \Delta\epsilon\,\operatorname{sen}\alpha_M, \end{cases}$$

con

$$\begin{aligned} &\varepsilon = 23^{o}26'21''448 \,-\, 46''815\,\frac{t-2000}{100} \,-\, 0''001\,\left(\frac{t-2000}{100}\right)^2, \\ &\Delta\psi = -\,0^{o}0048\,\operatorname{sen}(125^{o} - 0^{o}05295\,d) -\, 0^{o}0004\,\operatorname{sen}(200^{o}9 + 1^{o}97129\,d), \\ &\Delta\varepsilon = +\,0^{o}0026\,\cos(125^{o} - 0^{o}05295\,d) +\, 0^{o}0002\,\cos(200^{o}9 + 1^{o}97129\,d), \end{aligned}$$

con $d \,=\, (Fecha\,Juliana \,-\, 2451545{,}0)$.

8.3. Refracción astronómica

Cuando observamos un astro desde la superficie de la Tierra, la luz que de él procede tiene que atravesar la atmósfera terrestre hasta llegar al lugar de observación.

Si la atmósfera terrestre fuera un medio transparente homogéneo o vacío, entonces la luz procedente de los astros se propagaría en línea recta. Como no es así, la luz sufre desviaciones a medida que cruza la atmósfera.

El efecto de la refracción astronómica es difícil de modelizar con precisión puesto que depende de las condiciones atmosféricas, que varían para cada lugar de la

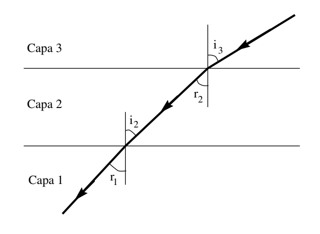


Figura 8.29: Refracción de la luz en las capas atmosféricas

superficie de la Tierra y para cada instante. Además, la atmósfera está constituida por capas de distintas densidades y espesores.

La exactitud en la determinación de un modelo de refracción atmosférica depende del modelo geométrico elegido para las capas atmosféricas –capas planas, esféricas o elipsódicas– y del espesor de cada una de estas capas, de la longitud de onda que se observe, de la precisión con que se determine el índice de refracción en el lugar de observación y de los movimientos del aire en la zona de observación.

Antes de realizar el cálculo y los efectos que la refracción atmosférica tiene en las observaciones astronómicas, recordemos que en Física se establece que los rayos, al pasar de un medio transparente a otro de mayor densidad o de mayor índice de refracción, se refractan o desvían acercándose a la dirección normal a la superficie de separación entre ambos medios.

Además, entre el ángulo de incidencia (I) de la dirección de la luz del astro en la capa superior y el ángulo de refracción (r) en la capa inferior,se cumple la *Ley de Snell*

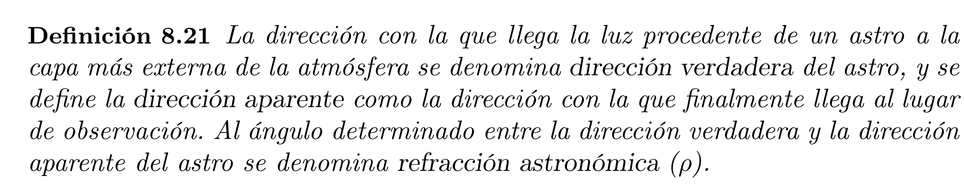
$$\frac{\operatorname{sen} I}{\operatorname{sen} r} = \frac{n_{inf}}{n_{sup}},$$

siendo n_{inf} y n_{sup} los índices de refracción de la capa inferior y superior, respectivamente, y que se definen como la razón entre la velocidad de la luz en el vacío (c_v) y en dicho medio (v)

$$n = \frac{c_v}{v}.$$

8.3.1. Cálculo de la refracción astronómica

La luz del astro se propaga en línea recta hasta incidir en la atmósfera para refractarse sucesivamente a medida que atraviesa las diferentes capas atmosféricas. En cada refracción cambiará de dirección, de forma que la dirección con que llega al lugar de observación será distinta a la de llegada a la capa más externa de la atmósfera.



Definición 8.21 *La dirección con la que llega la luz procedente de un astro a la capa más externa de la atmósfera se denomina* dirección verdadera del astro, *y se define la* dirección aparente *como la dirección con la que finalmente llega al lugar de observación. Al ángulo determinado entre la dirección verdadera y la dirección aparente del astro se denomina* refracción astronómica *(ρ).*

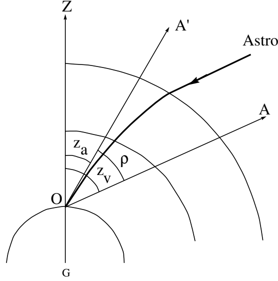


Figura 8.30: Ángulo de refracción

De esta definición se deduce que la refracción astronómica de un astro depende del lugar de observación, del instante de la observación, y, por tanto, de la situación del astro y de las condiciones meteorológicas existentes en ese instante en el lugar de observación.

Debido a que cuando un rayo que pasa de un medio menos denso a otro más denso se refracta, acercándose a la dirección normal a la superficie de separación entre ambos medios *(Ley de Snell)*, la distancia cenital verdadera del astro es mayor que la distancia cenital aparente con la que ha sido observado.

Por tanto, si en un determinado instante z_v es la distancia cenital verdadera de un astro y z_a es la distancia cenital aparente, entonces la refracción astronómica ρ viene dada por

$$\rho = z_v - z_a.$$

En el cálculo de la refracción astronómica en función de la distancia cenital aparente del astro distinguimos los siguientes casos:

• Si el astro está próximo al horizonte $z_a \sim 90^o$, entonces la refracción astronómica vale 35' aproximadamente.

• Si $75^o < z_a < 90^o$, entonces la refracción no admite un valor aproximado, de forma que se toman valores tabulados obtenidos experimentalmente.

• En el caso que $z_a < 75^o$ distinguiremos entre:

i) $0^o < z_a < 45^o$

Proposición 8.34 *La refracción astronómica para un astro observado con una distancia cenital aparente* $0^o < z_a < 45^o$ *viene dada por*

$$\rho = 60''37 \tan z_a.$$

Demostración. La proyección sobre el horizonte del punto de contacto entre la capa más externa de la atmósfera y el rayo luminoso que procede de astros observados con una distancia cenital aparente comprendida entre 0° y 45° está suficientemente próximo al lugar de observación.

En base a este hecho, podemos considerar en un entorno del lugar de observación una aproximación plana de la superficie terrestre y de la atmósfera que le circunda.

Consideremos, pues, la atmósfera dividida en n capas planas y paralelas entre sí numeradas en orden creciente a partir de la capa más próxima a la superficie terrestre (capa 0). La capa $n-1$ será la última capa atmosférica y la capa n el vacío cósmico.

Sean $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i_n$ los índices de refracción de estas $n+1$ capas.

En cada una de ellas se cumplirá la ley de Snell. Además, al ser el ángulo de incidencia en una capa igual al ángulo refractado de la precedente, tendremos:

$$\frac{\operatorname{sen} I_j}{\operatorname{sen} r_{j-1}} = \frac{i_{j-1}}{i_j} \quad \text{para } 1 \leq j \leq n$$

y

$$\frac{\operatorname{sen} r_{j-1}}{\operatorname{sen} r_{j-2}} = \frac{i_{j-2}}{i_{j-1}} \quad \text{para } 2 \leq j \leq n$$

De donde

$$i_n \operatorname{sen} I_n = i_{n-1} \operatorname{sen} r_{n-1} = \ldots = i_1 \operatorname{sen} r_1 = i_0 \operatorname{sen} r_0.$$

Como $I_n = z_v$ y $r_0 = z_a$, entonces $i_n \operatorname{sen} z_v = i_0 \operatorname{sen} z_a$. Ahora bien, teniendo en cuenta que en el vacío el índice de refracción es la unidad ($i_n = 1$) y que la

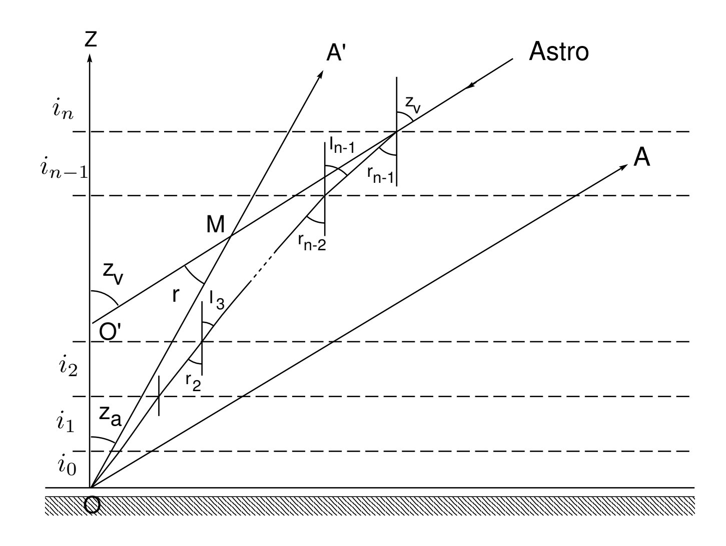


Figura 8.31: Ángulo de refracción en el modelo de atmósfera plana

distancia cenital verdadera está dada por $z_v = z_a + \rho$, se tiene

$$\operatorname{sen}(z_a + \rho) = i_0 \operatorname{sen} z_a \Leftrightarrow \operatorname{sen} z_a \cos\rho + \cos z_a \operatorname{sen}\rho = i_0 \operatorname{sen} z_a.$$

Puesto que el ángulo de refracción es pequeño, podemos aproximar el seno por el arco y el coseno por la unidad:

$$\operatorname{sen} z_a + \cos z_a \,\rho'' \operatorname{sen} 1'' = i_0 \operatorname{sen} z_a.$$

Dividiendo por $\operatorname{sen} z_a$ se llega a que

$$\rho'' = \frac{i_0 - 1}{\operatorname{sen} 1''} \tan z_a = \alpha \tan z_a.$$

El factor α se denomina *constante de refracción* y, considerando que el valor medio del índice de refracción para la capa atmosférica inmediata a la superficie de la Tierra es aproximadamente $i_0 = 1{,}0002927$, su valor es $60''37$.

Por tanto, finalmente resulta $\rho = 60''37 \tan z_a$.

ii) $45^{\rm o} < z_a < 75^{\rm o}$

Proposición 8.35 *La refracción astronómica para un astro observado con una distancia cenital aparente* $45^o < z_a < 75^o$ *viene dada por la Fórmula de Laplace:*

$$\rho'' = 60''29 \tan z_a - 0''07 \tan^3 z_a,$$

o por la Fórmula de Bradley:

$$\rho'' \;=\; 57''8\,\tan(z_a - 230''\tan z_a)\,\frac{278(1-0{,}00016\,t)}{753{,}5(268+t)}\,b,$$

siendo z_a la distancia cenital aparente, t la temperatura y b la presión atmosférica.

Laplace obtuvo la expresión general

$$\rho \;=\; A\tan z_a \;+\; B\,\tan^3 z_a,$$

donde A y B son constantes numéricas.

Para obtener el valor de estas constantes se realizan observaciones de una estrella circumpolar, de coordenadas absolutas (α,δ), en su culminación superior e inferior desde un lugar de latitud ϕ conocida.

En estas posiciones se tiene:

- En la culminación superior: $z_v \;=\; \phi \,-\, \delta$.
- En la culminación inferior: $z'_v \;=\; 180^{\mathrm{o}} \,-\, (\phi \,+\, \delta)$.

Como $z_v \;=\; z_a \,+\, \rho$ entonces:

$$\left\{\begin{array}{l} \phi \,-\, \delta \,=\, z_v \,=\, z_a \,+\, A\tan z_a \,+\, B\,\tan^3 z_a, \\ 180^{\mathrm{o}} \,-\, (\phi\,+\,\delta) \,=\, z'_v \,=\, z'_a \,+\, A\tan z'_a \,+\, B\,\tan^3 z'_a. \end{array}\right.$$

La observación proporciona los valores z_a y z'_a, y suponiendo conocidas la latitud y declinación de la estrella se tendrá un sistema de dos ecuaciones con las dos constantes A y B como incógnitas. En realidad se observa un gran número de estrellas, obteniéndose un sistema con mayor número de ecuaciones que de incógnitas, que se resuelve aplicando el método de mínimos cuadrados.

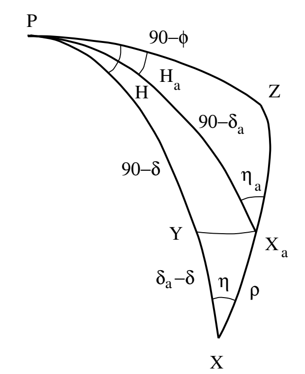


Figura 8.32

Proposición 8.36 *Las correcciones que hay que efectuar a las coordenadas absolutas aparentes (α_a,δ_a) de una astro (X) para obtener sus coordenadas absolutas verdaderas (α_v,δ_v) vienen dadas por*

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta\alpha \,=\, \alpha \,-\, \alpha_a \,=\, -\,60''37\,\tan z_a\,\dfrac{\operatorname{sen}\eta}{\cos\delta_a}, \\ \Delta\delta \,=\, \delta \,-\, \delta_a \,=\, -\,60''37\,\tan z_a\,\cos\eta, \end{array}\right.$$

donde η es el ángulo paraláctico del astro y z_a la distancia cenital aparente.

<u>Demostración</u>. Consideremos el triángulo de posición determinado por el astro X, el polo norte celeste P y el cénit del lugar de observación Z.

La refracción produce un desplazamiento de la estrella hacia el cénit ocupando una posición aparente X_a.

Consideramos el punto Y obtenido como intersección del círculo menor de polo P que pasa por la posición aparente X_a con el meridiano que pasa por la posición verdadera X del astro.

Puesto que el arco XX_a es pequeño podremos considerar el triángulo YXX_a como un triángulo plano rectángulo. En este triángulo el lado XX_a será igual al valor de la refracción ρ, el lado YX a $\delta_a - \delta$, y el ángulo de vértice X será aproximadamente igual al ángulo paraláctico η de vértice X_a.

De este triángulo,

$$\delta_a - \delta = \rho \cos\eta \Rightarrow \delta - \delta_a = -\rho \cos\eta = -60''37 \tan z_a \cos\eta.$$

Por otra parte, aplicando la 2ª fórmula de Bessel al triángulo PXX_a se tiene

$$\frac{\operatorname{sen}(H - H_a)}{\operatorname{sen}\rho} = \frac{\operatorname{sen}\eta}{\operatorname{sen}(90^o - \delta_a)},$$

de donde

$$\operatorname{sen}(H - H_a) = \frac{\operatorname{sen}\rho \operatorname{sen}\eta}{\operatorname{sen}\delta_a}.$$

Aproximando $\operatorname{sen}(H - H_a) \approx \Delta H$ y $\operatorname{sen}\rho \approx \rho$

$$\Delta H = \frac{\rho \operatorname{sen}\eta}{\operatorname{sen}\delta_a} = 60''37 \tan z_a \frac{\operatorname{sen}\eta}{\cos\delta_a}.$$

Como la hora sidérea en la posición verdadera y aparente coinciden, se tendrá que

$$H + \alpha = H_a + \alpha_a \Rightarrow 0 = (H - H_a) + (\alpha - \alpha_a) \Rightarrow -\Delta H = \Delta\alpha,$$

de donde

$$\alpha - \alpha_a = \Delta\alpha = -60''37 \tan z_a \frac{\operatorname{sen}\eta}{\cos\delta_a}.$$

El ángulo paraláctico η se obtiene aplicando la 1ª fórmula de Bessel en el triángulo esférico PZX_a

$$\cos\eta = \frac{\operatorname{sen}\phi - \operatorname{sen}\delta_a \cos z_a}{\cos\delta_a \operatorname{sen} z_a}.$$

8.3.2. Efectos de la refracción astronómica

Entre los efectos más importantes producidos por la refracción astronómica destacan los siguientes:

- Las alturas observadas de los astros son mayores que las verdaderas o también, las distancias cenitales verdaderas son mayores que las distancias cenitales aparentes.
- La refracción adelanta la hora de salida de los astros y atrasa la puesta de los mismos. Consecuentemente, un astro permanece sobre el horizonte más tiempo del que verdaderamente está.
- Disminuye la duración de la noche y aumenta la del día.

- El valor de la refracción astronómica en el horizonte es aproximadamente igual al diámetro angular del Sol, por lo que cuando el Sol está tangente al horizonte y sobre él, en realidad está por debajo y tangente a dicho plano.
- El Sol y la Luna se observan de forma ovalada en el orto y en el ocaso debido a que la refracción astronómica en el borde inferior es aproximadamente $6'$ mayor que en el borde superior.
- La atmósfera absorbe cierta radiaciones de la luz produciendo, por ejemplo, el color rojizo del Sol y de la Luna en sus ortos y ocasos.(Absorción)
- Al atravesar la atmósfera, la diferente refracción que tienen los rayos simples que componen la luz procedente de una estrella produce variaciones en la intensidad luminosa y color de la estrella.(Centelleo)

8.4. Aberración de la luz

La aberración de la luz es el fenómeno producido por el movimiento relativo del observador con respecto al astro causando un cambio aparente en su dirección.

Una de las diferencias entre la aberración, la precesión y la nutación radica en que éstos últimos fenómenos se deben esencialmente a un desplazamiento del sistema de referencia al cual se refieren las coordenadas del astro, mientras que la aberración está causada por las distintas velocidades de que están dotados el observador u origen del sistema y la luz que procede del astro.

En 1675, Roemer, realizando observaciones de los eclipses de los satélites galileanos de Júpiter, demuestra que la velocidad de la luz es finita y la cuantifica en $299{,}792, 5$ Km/seg. Este hecho supone que en realidad observamos estrellas cuya luz partió en el pasado, de forma que el firmamento que vemos no es el firmamento actual sino una combinación de distintos tiempos superpuestos.

Bradley, en 1725, descubre el fenómeno de la aberración de la luz efectuando observaciones a lo largo del año de las culminaciones de la estrella γ-Dragón en el Observatorio de Greenwich y concluye que este efecto depende de la relación existente entre la velocidad orbital de la Tierra, la velocidad de la luz y la posición del astro.

Aunque la velocidad orbital de la Tierra es pequeña, aproximadamente $29, 68$ Km/seg, si se compara con la velocidad de la luz no es despreciable. Para ello basta comprobar que en un segundo la Tierra se desplaza en su órbita 30 Km. Asimismo, también tendremos en cuenta el efecto debido a la relación entre la velocidad de rotación terrestre, unos $0, 49$ Km/seg, y la velocidad de la luz.

8.4.1. Aberración anua

Definición 8.22 *La aberración anua es el desplazamiento de los astros debido al efecto combinado de la velocidad de la luz y del movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol.*

El fenómeno de la aberración anua se manifiesta gracias a que la velocidad de la luz es finita y al cambio de dirección que experimenta el vector velocidad del movimiento orbital de la Tierra.

Definición 8.23 *Se denomina ángulo de aberración a la diferencia entre las direcciones real y observada de un astro, producida por la aberración anua.*

Proposición 8.37 *Si θ y θ_1 son las direcciones geocéntricas observada y real de un astro, entonces el ángulo de aberración viene dado por*

$$\Delta\theta = \theta - \theta_1 = 20''492 \operatorname{sen}\theta.$$

Demostración.

A) Consideremos la Tierra como un punto en el espacio y sobre él situemos un telescopio ideal dirigido hacia un astro. Si la Tierra permaneciera inmóvil en el espacio, la luz procedente del astro llegaría al objetivo del telescopio, A, con un determinado ángulo θ_1. Ahora bien, durante el intervalo de tiempo, t, que la luz tarda en recorrer el tubo del telescopio, la Tierra habrá pasado de la posición que ocupaba en ese instante E hasta otro punto E_1 de su órbita. Luego la dirección observada del astro será, en realidad, θ.

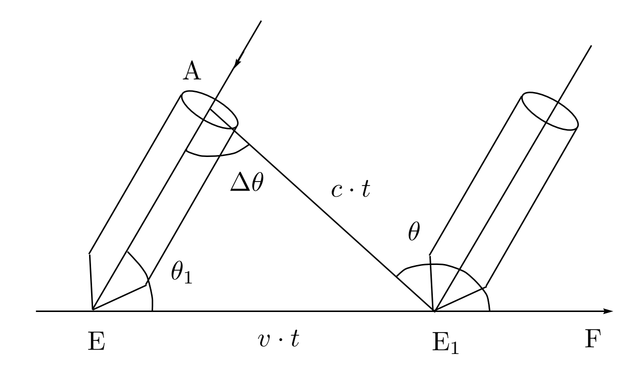


Figura 8.33: Aberración anua (I)

Obviamente, en el triángulo AEE_1 el lado AE_1 será igual a la longitud del telescopio, esto es, $c \times t$, siendo c la velocidad de la luz; el lado EE_1 será el espacio recorrido por la Tierra durante el tiempo t y por tanto valdrá $v \times t$, donde ahora v es la velocidad de la Tierra.

Con esta modelización, el ángulo de aberración $\Delta\theta = \theta - \theta_1$ es al ángulo correspondiente al vértice A, y siendo θ_1 el ángulo con vértice en E.

En estas condiciones,

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{c\,t} = \frac{\operatorname{sen}\Delta\theta}{v\,t},$$

de donde

$$\operatorname{sen}\Delta\theta = \frac{v}{c}\operatorname{sen}\theta_1.$$

Puesto que el ángulo de aberración es pequeño, podemos efectuar la aproximación del seno de un ángulo por dicho ángulo, y tendremos

$$\operatorname{sen}\Delta\theta \simeq \Delta\theta = \frac{v}{c}\operatorname{sen}\theta_1.$$

Teniendo en cuenta la ya comentada conversión entre radianes y segundos de arco se tiene que el ángulo de aberración en segundos es

$$\Delta\theta'' = \frac{v}{c}\operatorname{sen}\theta_1 \frac{1}{\operatorname{sen}1''} = 206265\,\frac{v}{c}\operatorname{sen}\theta_1 = K_a \operatorname{sen}\theta_1.$$

A K_a se le denomina *constante de aberración* y su valor aproximado es $20''492$. Por la misma razón expuesta anteriormente acerca de la pequeña magnitud del ángulo de aberración, y dada que la dirección observada es θ, se tiene finalmente que

$$\Delta\theta'' = 20''492\operatorname{sen}\theta.$$

B) Consideremos un sistema de referencia estacionario $\{O; X, Y\}$. La luz procedente de un astro llegará a un punto E situado sobre el eje X con una dirección θ_1.

Ahora bien, si consideramos un sistema de referencia móvil $\{O'; X', Y'\}$ tal que el origen O' se mueve con velocidad uniforme y dirección paralela al eje X, la dirección procedente del mismo astro llegará con una dirección θ al punto de observación E' perteneciente al eje X' del sistema móvil.

Si $\overline{W}$ es el vector velocidad de la luz con respecto al sistema estacionario, entonces sus coordenadas (x, y) serán

$$\begin{cases} x = -W\cos\theta_1, \\ y = -W\operatorname{sen}\theta_1. \end{cases}$$

El signo negativo se debe a que, en vez de considerar como origen de este vector el propio astro, resulta más cómodo establecer dicho origen en el punto E. Además su módulo será $W = |\overline{W}| = c$.

Respecto del sistema de referencia móvil, la velocidad de luz procedente del astro será ahora un vector $\overline{W'}$ que se obtiene como la composición de los vectores $\overline{W}$ y del vector velocidad $\overline{V}$ del sistema móvil. Las coordenadas (x', y') de este vector serán

$$\begin{cases} x' = -W'\cos\theta, \\ y' = -W'\operatorname{sen}\theta. \end{cases}$$

Puesto que el movimiento del sistema móvil es paralelo al eje X, entre ambas coordenadas se verifica

$$\begin{cases} x' = x + v, \\ y' = y, \end{cases}$$

siendo $v = |\overline{V}|$. De aquí

$$\cot\theta = \frac{x'}{y'} = \frac{x+v}{y} = \frac{x}{y} + \frac{v}{y} = \cot\theta_1 - \frac{v}{W}\csc\theta_1 \Rightarrow \cot\theta = \cot\theta_1 - \frac{v}{c}\csc\theta_1.$$

Multiplicando por $\operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta$ se tiene

$$\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta - \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta) = -\frac{v}{c}\operatorname{sen}\theta.$$

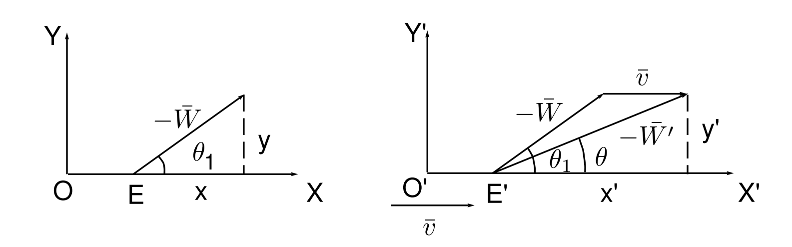


Figura 8.34: Aberración anua (II)

Como el ángulo de aberración es pequeño, podemos considerar la aproximación $\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta) \simeq \theta_1 - \theta$, y por tanto

$$\theta - \theta_1 \,=\, \Delta\theta \,=\, \frac{v}{c}\,\operatorname{sen}\theta,$$

de donde, con las consideraciones anteriores respecto a la constante de aberración, se tiene finalmente

$$\Delta\theta'' \,=\, 20''492\,\operatorname{sen}\theta.$$

Proposición 8.38 *Si (λ, β) y (λ', β') son las coordenadas eclípticas geocéntricas observadas y reales de una estrella, entonces las correcciones debidas a la aberración anua en longitud y latitud eclíptica vienen dadas por:*

$$\begin{cases} \Delta\lambda \,=\, \lambda \,-\, \lambda' \,=\, -\,20''492\,\sec\beta\,\cos\left(\lambda_\odot - \lambda\right), \\ \Delta\beta \,=\, \beta \,-\, \beta' \,=\, -\,20''492\,\operatorname{sen}\beta\,\operatorname{sen}\left(\lambda_\odot - \lambda\right), \end{cases}$$

donde $\lambda_\odot$ es la longitud eclíptica del Sol.

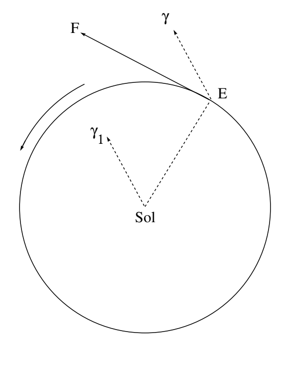


Figura 8.35

Demostración. Supongamos que la órbita de la Tierra alrededor del Sol es circular y que la velocidad orbital es constante. Si E es la posición de la Tierra en un instante, entonces la dirección del movimiento de la Tierra, que es la dirección tangente a la órbita EF, formará un ángulo recto con el vector de posición $\odot E$ de la Tierra en su órbita. Sea $E\Upsilon$ o $\odot\Upsilon_1$ la dirección del punto Aries. La longitud geocéntrica, $\lambda_\odot$, del Sol será el ángulo $\Upsilon E\odot$, y la longitud geocéntrica de la dirección del movimiento terrestre será $\lambda_F = \Upsilon EF = \lambda_\odot - 90^{\circ}$. Así, si consideramos la esfera celeste geocéntrica, entonces el punto F en un año dará una vuelta completa sobre la eclíptica. Sea X_1 la posición real de un astro sobre la esfera celeste. Puesto que el desplazamiento aparente por aberración anua se produce en el plano EFX_1, el astro se observará en la posición X, perteneciente al círculo máximo que pasa por los puntos F y X_1. De forma que

$$XF \,=\, \theta,\; X_1F \,=\, \theta_1,\; XX_1 = \theta - \theta_1 = K_a\,\operatorname{sen}\theta,$$

siendo θ y θ_1 las direcciones observada y real del astro, $K_a = 20''492$ la constante de aberración y $XX_1 = \Delta\theta$ el ángulo de aberración.

Los elementos del triángulo de posición determinado por los puntos π, X y X_1 serán

$$\begin{array}{ll} \pi \,=\, \lambda' - \lambda, & XX_1 = \Delta\theta = K_a\,\operatorname{sen}\theta, \\ \pi X \,=\, 90^{\circ} - \beta, & \pi X_1 \,=\, 90^{\circ} - \beta'. \end{array}$$

Consideremos los máximos de longitud que pasan por los puntos X y X_1, y sea Y el punto intersección del máximo de longitud que pasa por X_1 con el paralelo de latitud β que pasa por X.

El ángulo central del arco XY del paralelo de latitud β es $\lambda' - \lambda = \pi$, y el arco será, por tanto

$$XY \,=\, (\lambda' - \lambda)\,\mathrm{sen}(90^{\mathrm{o}} - \beta) \,=\, (\lambda' - \lambda)\,\cos\beta \,=\, \Delta\lambda\,\cos\beta,$$

y $X_1Y \,=\, \beta \,-\, \beta' \,=\, -\,\Delta\beta$.

Si en el triángulo infinitesimal plano XX_1Y denotamos el ángulo YXX_1 por ω entonces

$$\left\{\begin{array}{l} XY \,=\, XX_1\,\cos\omega \\ X_1Y \,=\, XX_1\,\mathrm{sen}\,\omega \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta\lambda\,\cos\beta \,=\, XX_1\,\cos\omega \\ -\,\Delta\beta \,=\, XX_1\,\mathrm{sen}\,\omega \end{array}\right.$$



Figura 8.36

Luego

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta\lambda \,=\, K_a\,\mathrm{sen}\,\theta\,\cos\omega\,\sec\beta \\ \Delta\beta \,=\, -K_a\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\omega \end{array}\right. \tag{38}$$

En el triángulo esférico rectilátero πXF tendremos

$$\pi F \,=\, 90^{\mathrm{o}}, \qquad \pi X \,=\, 90^{\mathrm{o}} - \beta, \qquad XF \,=\, \theta,$$
$$\pi\hat{X}F \,=\, 90^{\mathrm{o}} + \omega, \quad X\hat{\pi}F \,=\, (\lambda_\odot - 90^{\mathrm{o}}) - \lambda.$$

Aplicando las reglas de Neper a este triángulo se obtiene

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{sen}\,\theta\,\cos\omega \,=\, -\,\cos(\lambda_\odot - \lambda), \\ \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\omega \,=\, \mathrm{sen}\,\beta\,\mathrm{sen}\,(\lambda_\odot - \lambda), \end{array}\right.$$

que sustituidas en las ecuaciones (38) proporcionan las expresiones

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta\lambda \,=\, -\,K_a\,\sec\beta\,\cos(\lambda_\odot - \lambda), \\ \Delta\beta \,=\, -\,K_a\,\mathrm{sen}\,\beta\,\mathrm{sen}\,(\lambda_\odot - \lambda), \end{array}\right.$$

Según acabamos de ver, podemos considerar que el desplazamiento por aberración anua XX_1 puede descomponerse en dos desplazamientos: de X_1 a Y y de Y a X; de forma que si denotamos por $x = YX$ e $y = X_1Y$, tendremos

$$\left\{\begin{array}{l} x \,=\, \Delta\lambda\cos\beta \,=\, -K_a\cos(\lambda_\odot - \lambda), \\ y \,=\, -\Delta\beta \,=\, K_a\,\mathrm{sen}\,\beta\,\mathrm{sen}\,(\lambda_\odot - \lambda), \end{array}\right.$$

Eliminando $(\lambda_\odot - \lambda)$ se obtiene

$$\frac{x^2}{K_a^2} \,+\, \frac{y^2}{K_a^2\,\mathrm{sen}^2\,\beta} \,=\, 1.$$

Esta es la ecuación de una elipse, conocida como *elipse de aberración*, cuyo centro es la posición real del astro, el semieje menor es constante para todos los astros y es paralelo a la eclíptica y el semieje mayor depende de la situación real del astro sobre la esfera celeste. Cada astro recorrerá su elipse de aberración en un año.

Proposición 8.39 *Si* (α, δ) *y* (α', δ') *son las coordenadas absolutas geocéntricas observadas y reales de una estrella entonces las correcciones debidas a la aberración anua en ascensión recta y declinación vienen dadas por*

$$\left\{ \begin{array}{rl} \Delta\alpha = \alpha - \alpha' = & -20''492 \sec\delta \left(\cos\lambda_\odot \cos\varepsilon \cos\alpha + \operatorname{sen}\lambda_\odot \operatorname{sen}\alpha\right), \\ \Delta\delta = \delta - \delta' = & -20''492 \left(-\cos\lambda_\odot \cos\varepsilon \operatorname{sen}\delta + \operatorname{sen}\lambda_\odot \cos\alpha \operatorname{sen}\delta, \right. \\ & \left. +\cos\lambda_\odot \operatorname{sen}\varepsilon \cos\delta\right) \end{array} \right.$$

donde $\lambda_\odot$ *es la longitud eclíptica del Sol y* ε*, la oblicuidad de la eclíptica.*

8.4.2. Aberración diurna

Definición 8.24 *La aberración diurna es la variación que se produce en las posiciones de los astros como consecuencia del movimiento de rotación terrestre y de la velocidad de la luz.*

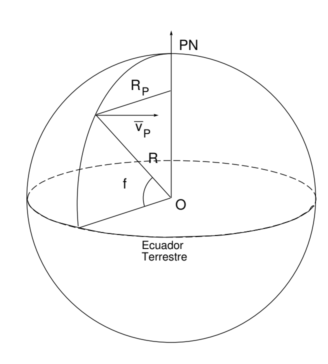


Figura 8.37: Rotación terrestre

Proposición 8.40 *Si consideramos la Tierra como una esfera, entonces la velocidad a que está sometido un observador situado en un paralelo de latitud* ϕ *por la rotación terrestre viene dada por*

$$v_o = 0{,}46 \cos\phi \, Km/seg,$$

y la constante de aberración diurna por

$$k_d \simeq 0''316 \cos\phi = 0^s021 \cos\phi.$$

<u>Demostración</u>. Si $R \simeq 6370\,Km.$ es el radio terrestre, entonces el radio del paralelo en donde está situado el observador es $R_P = R\cos\phi$. Luego

$$v_o = \frac{e}{t} = \frac{2\,\pi\,R_P}{24\times 60\times 60} = \frac{2\,\pi\,R\cos\phi}{24\times 60\times 60} = 0{,}46\cos\phi\; Km/seg.$$

Además,

$$k_d = \frac{v_o}{c}\frac{1}{\operatorname{sen}1''} = \frac{0{,}46\cos\phi}{300000}\frac{1}{\operatorname{sen}1''} = 0''316\cos\phi = 0^s021\cos\phi.$$

Proposición 8.41 *Sean* (H, δ) *y* (H', δ') *las coordenadas horarias topocéntricas observadas y reales de una estrella. Las correcciones por la aberración diurna en ángulo horario y declinación vienen dadas por:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta H = H' - H = -\,0^s021 \cos\phi \sec\delta \cos H, \\ \Delta\delta = \delta' - \delta = 0''32 \cos\phi \operatorname{sen}\delta \operatorname{sen} H, \end{array} \right.$$

siendo ϕ *la latitud del lugar de observación.*

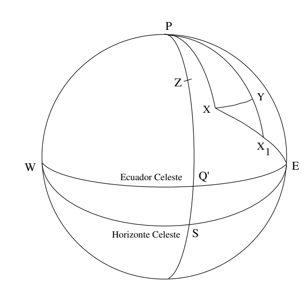


Figura 8.38

Demostración. La dirección del movimiento es perpendicular al plano que contiene al meridiano del lugar hacia el este. Sean X_1 y X las posiciones real y observada del astro sobre la esfera celeste. Este desplazamiento se produce en el plano determinado por la dirección este y por la dirección del astro y, consecuentemente, el punto X estará situado sobre el círculo máximo que pasa por los puntos este E y X.

Denotando por $XE = \theta$ y $X_1E = \theta_1$ se tiene que

$$XX_1 \,=\, \theta - \theta_1 \,=\, k_d \,\mathrm{sen}\,\theta. \qquad (39)$$

Sea Y el punto intersección entre el paralelo de declinación δ con el meridiano celeste que pasa por la posición X_1. Puesto que el ángulo horario se mide sobre el ecuador desde el meridiano del lugar, Q', en sentido retrógrado, se cumple que $H' < H$ y por tanto

$$H - H' \,=\, X\hat{P}Y \;\Rightarrow\; XY \,=\, X\hat{P}Y\, \cos\delta \;\Rightarrow\; XY \,=\, -\,\Delta H\, \cos\delta. \qquad (40)$$

De igual modo

$$X_1Y \,=\, \delta - \delta' \,=\, -\,\Delta\delta. \qquad (41)$$

Si en el triángulo infinitesimal plano XYX_1 denotamos $\psi = \widehat{YXX_1}$ entonces tenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} XY \,=\, XX_1\, \cos\psi, \\ X_1Y \,=\, XX_1\, \mathrm{sen}\,\psi. \end{array} \right. \qquad (42)$$

Teniendo en cuenta la expresión (39) y sustituyendo en (40) y (41) se tiene

$$\left\{ \begin{array}{l} -\,\Delta H\, \cos\delta \,=\, k_d\, \mathrm{sen}\,\theta\, \cos\psi, \\ -\,\Delta\delta \,=\, k_d\, \mathrm{sen}\,\theta\, \mathrm{sen}\,\psi, \end{array} \right. \qquad (43)$$

En el triángulo esférico rectilátero PXE,

$$\begin{array}{lll} PE \,=\, 90^{\circ}, & PX \,=\, 90^{\circ} - \delta, & XE \,=\, \theta, \\ P\hat{X}E \,=\, 90^{\circ} + \psi, & X\hat{P}E \,=\, H - 270^{\circ}. & \end{array}$$

Aplicando las reglas de Neper a este triángulo se obtiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{sen}\,\theta\, \cos\psi \,=\, \cos H, \\ \mathrm{sen}\,\theta\, \mathrm{sen}\,\psi \,=\, -\, \mathrm{sen}\,\delta\, \mathrm{sen}\,H. \end{array} \right.$$

Sustituyendo estas expresiones y el valor de k_d en (43), se obtiene finalmente

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta H \,=\, H' - H \,=\, -\,0^{s}021\, \cos\phi\, \sec\delta\, \cos H, \\ \Delta\delta \,=\, \delta' - \delta \,=\, 0''32\, \cos\phi\, \mathrm{sen}\,\delta\, \mathrm{sen}\,H. \end{array} \right.$$

Corolario 8.4 *La variación de las coordenadas topocéntricas absolutas por la aberración diurna viene dada por*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\alpha \,=\, \alpha' - \alpha \,=\, -\,0^{s}021\, \cos\phi\, \sec\delta\, \cos(\theta - \alpha), \\ \Delta\delta \,=\, \delta' - \delta \,=\, 0''32\, \cos\phi\, \mathrm{sen}\,\delta\, \mathrm{sen}\,(\theta - \alpha). \end{array} \right.$$

siendo θ la hora sidérea y (α, δ) y (α', δ') las coordenadas absolutas topocéntricas observadas y reales de la estrella.

8.5. Movimiento propio

Hasta ahora hemos asumido implícitamente que las estrellas forman un sistema de referencia invariable en el espacio, pero realmente no es así. Cada estrella posee un movimiento que puede considerarse rectilíneo y uniforme con respecto a un sistema ideal.

El Sol, por ejemplo, tiene un movimiento hacia un punto, denominado *apex*, que está en la constelación de Hércules, produciendo un desplazamiento aparente de todas las demás estrellas hacia el antiapex del Sol. A este desplazamiento habrá que añadir el particular de cada estrella, que puede ocurrir en cualquier dirección.

Definición 8.25 *Se llama movimiento propio de una estrella al desplazamiento angular por unidad de tiempo que resulta del desplazamiento relativo de la estrella con respecto al Sol y de su movimiento particular en el universo.*

El movimiento propio de una estrella está definido por su velocidad, μ, que suele expresarse en segundos de arco por año o por siglo, y la dirección o ángulo de posición σ de su trayectoria del movimiento. El movimiento propio será mayor cuanto más próxima esté una estrella al Sol, y aparece tabulado en los catálogos de estrella.

Proposición 8.42 *Sean (α, δ) y (α', δ') las coordenadas absolutas correspondientes a las posiciones A_0 y A en los instantes t_0 y t de una estrella cuyo movimiento propio viene dado por (μ, σ). Las componentes del movimiento propio en ascensión recta y declinación vienen dadas por*

$$\begin{cases} \mu_\alpha = \mu \operatorname{sen} \sigma \sec \delta', \\ \mu_\delta = \mu \cos \sigma. \end{cases}$$

Demostración. En el triángulo de posición determinado por el polo norte celeste y las posiciones de la estrella correspondientes a los instantes t_0 y t tenemos los siguientes elementos:

$$PA_0 = 90^{\text{o}} - \delta, \quad PA = 90 - \delta', \quad A_0A = \mu\,\Delta t,$$
$$\hat{P} = \Delta\alpha, \qquad \hat{A}_0 = \sigma,$$

siendo $\Delta t = t - t_0$.

Aplicando la 2ª fórmula de Bessel tenemos

$$\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\cos\delta'} = \frac{\operatorname{sen}\Delta\alpha}{\mu\,\Delta t},$$

de donde $\Delta\alpha \simeq \operatorname{sen}\Delta\alpha = \mu\,\Delta t \operatorname{sen}\sigma \sec\delta'$.

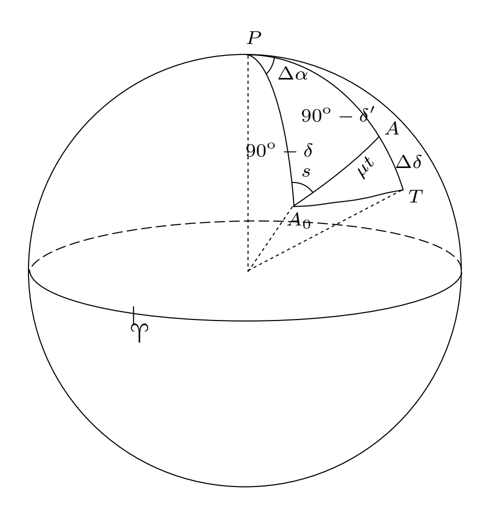


Figura 8.39: Movimiento diurno

Sea T el punto intersección del paralelo celeste que pasa por A_0 y con el meridiano celeste que pasa por A. Del triángulo plano infinitesimal A_0TA, rectángulo en T, se obtiene $\Delta\delta = \delta - \delta' = \mu\,\Delta t\,\cos\sigma$. Ahora bien, teniendo en cuenta que estas variaciones en ascensión recta y declinación se producen en el intervalo de tiempo Δt podemos considerar que

$$\begin{cases} \Delta\alpha = \mu_\alpha\,\Delta t = \mu\,\Delta t\,\operatorname{sen}\sigma\,\sec\delta', \\ \Delta\delta = \mu_\delta\,\Delta t = \mu\,\Delta t\,\cos\sigma, \end{cases}$$

y consecuentemente

$$\begin{cases} \mu_\alpha = \mu\,\operatorname{sen}\sigma\,\sec\delta', \\ \mu_\delta = \mu\,\cos\sigma. \end{cases}$$

Corolario 8.5 *Sean (α,δ) y (α',δ') las coordenadas absolutas de una estrella correspondientes a los instantes t_0 y t y cuyo movimiento propio viene dado por (μ,σ). Entonces la variación en ascensión recta y declinación por movimiento propio de la estrella viene dada por*

$$\begin{cases} \Delta\alpha = \mu\,\Delta t\,\operatorname{sen}\sigma\,\sec\delta', \\ \Delta\delta = \mu\,\Delta t\,\cos\sigma. \end{cases}$$

8.6. Reducción de posiciones de estrellas

La posición de un astro sobre la esfera celeste está referida a un determinado sistema de referencia definido por un origen, un plano fundamental y una dirección sobre este plano que es el origen de medida de ángulos. Estos elementos están sometidos a efectos geométricos, –cambios del origen del sistema de referencia,

paralaje, precesión y nutación–, y a efectos físicos, –refracción, aberración–, que causan variaciones en las coordenadas del astro.

En la transformación entre coordenadas topocéntricas y geocéntricas se tendrán en cuenta el cambio del origen del sistema de referencia y la paralaje diurna. Entre coordenadas geocéntricas y heliocéntricas, además del cambio del origen del sistema de referencia, tendremos en cuenta la paralaje anual, la precesión y la nutación. La refracción y la aberración diurna afectarán exclusivamente a las coordenadas topocéntricas, mientras que la aberración anua afectará a las coordenadas geocéntricas.

Definición 8.26 *Se denominan* posiciones medias *de un astro a sus coordenadas precisas corregidas por precesión;* posiciones verdaderas *a las coordenadas medias corregidas por nutación;* posiciones aparentes *a las coordenadas verdaderas corregidas por paralaje y aberración anua y* posiciones instrumentales *a las coordenadas aparentes corregidas por paralaje y aberración diurna y por refracción.*

Las coordenadas precisas de un astro son posiciones referidas a una determinada época de referencia que se han obtenido mediante observaciones con instrumentos astronómicos de alta precisión –círculo meridiano, astrógrafo, astrolabio impersonal Danjon–. En realidad, cuando nos referimos a las coordenadas precisas, implícitamente entendemos que son las coordenadas precisas para un instante determinado y no para la época de referencia; esto es, estamos dando por supuesto que ya han sido corregidas por su movimiento propio.

Generalmente, las posiciones medias y verdaderas se dan en coordenadas heliocéntricas, las aparentes, en coordenadas geocéntricas, y las instrumentales, en coordenadas topocéntricas.

Definición 8.27 *Se denomina* reducción de posiciones de astros *al proceso encaminado a la obtención de coordenadas aparentes para un instante determinado a partir de sus coordenadas precisas referidas a una determinada época de referencia.*

La reducción de posiciones de astros se basa en los siguientes pasos:

1. Corrección de las coordenadas precisas por movimiento propio, obteniéndose coordenadas precisas para un determinado instante. Generalmente, estas coordenadas son coordenadas absolutas heliocéntricas.
2. Corrección de las coordenadas precisas por precesión, obteniéndose coordenadas heliocéntricas medias referidas al polo, ecuador y equinoccio medios.
3. Corrección de las coordenadas heliocéntricas medias por nutación, obteniéndose coordenadas heliocéntricas verdaderas referidas al polo, ecuador y equinoccio medios.
4. Corrección de las coordenadas heliocéntricas verdaderas por paralaje y aberración anua y transformación a coordenadas geocéntricas, obteniéndose coordenadas geocéntricas aparentes.

Si a continuación se quisieran obtener la coordenadas instrumentales se corregirían las coordenadas geocéntricas aparentes por paralaje y aberración diurna (sólo para astros del Sistema Solar) y por refracción y se transformarían a coordenadas topocéntricas. En esta situación, habría que efectuar un cambio de coordenadas absolutas a coordenadas horarias u horizontales. Las coordenadas instrumentales horarias se observarían con telescopios ecuatoriales, y las coordenadas horizontales, con telescopios altacimutales.

8.6.1. Sistemas fundamentales y catálogos de estrellas

Definición 8.28 *Se denominan* posiciones fundamentales *o* absolutas *de un astro a las coordenadas determinadas directamente, sin presuponer el conocimiento previo de las posiciones de otros astros; y* posiciones diferenciales *o* relativas *de un astro, a las coordenadas determinadas a partir de coordenadas conocidas a priori de otros astros.*

Definición 8.29 *Se denomina* sistema fundamental *a un conjunto de estrellas convenientemente distribuidas sobre la esfera celeste que están dotadas de posiciones fundamentales. Los sistemas de estrellas fundamentales se recogen en* catálogos de estrellas *que contienen sus coordenadas referidas al ecuador y equinoccio medio de una época determinada.*

Las estrellas pertenecientes a sistemas fundamentales se utilizan como puntos de referencia respecto de los cuales se pueden determinar las posiciones relativas de los demás astros. Además, las coordenadas que aparecen en los catálogos son coordenadas medias; esto es, corregidas por precesión y movimiento propio.

Para determinar la posición de un astro respecto al ecuador y equinoccio de una época determinada habría que fijar, en primer lugar, la posición sobre la esfera celeste del ecuador y del equinoccio, midiendo después respecto a ellos la posición de los astros. Puesto que el ecuador y el equinoccio no son observables directamente, su posición sobre la esfera celeste sólo queda determinada implícitamente por las coordenadas de los astros. Por tanto, no son las coordenadas de las estrellas fundamentales las que se determinan respecto al ecuador y equinoccio, sino que las posiciones del ecuador y del equinoccio son las que se determinan respecto de las estrellas fundamentales. De aquí la importancia de los catálogos de estrellas en Astronomía de Posición, pues definen un sistema de referencia fundamental.

En la actualidad el catálogo más importante es el *Five Fundamental Catalogue (FK5)* que contiene 1.535 estrellas dotadas de coordenadas heliocéntricas absolutas medias referidas al día 1.5 de Enero del año 2000. Contiene, además, otros datos, como pueden ser: la paralaje anua, la magnitud, los valores del movimiento propio. Otro catálogo es el *Carlsberg Meridian Catalogue* elaborado por el Real Observatorio de la Armada en San Fernando, el Real Observatorio de Greenwich y el Real Observatorio de Copenhague a partir de observaciones realizadas con el Círculo Meridiano de La Palma.

El instrumento astronómico que se utiliza para determinar posiciones fundamentales de estrellas es el Círculo Meridiano, que es un telescopio altacimutal de alta precisión cuya característica principal es que no tiene movimiento en acimut ($A = 0^o$); de forma que sólo se podrán realizar observaciones de estrellas a su paso por el meridiano del lugar.

Si suponemos inicialmente que la latitud del lugar es desconocida, observando estrellas circumpolares en sus culminaciones superior e inferior tendremos:

$$\begin{cases} z_\odot = \delta - \phi \\ z_I = 180^o - \phi - \delta \end{cases}$$

siendo $z_\odot$ y z_I las distancias cenitales observadas de las culminaciones superior e inferior, ϕ la latitud del lugar y δ la declinación de la estrella.

De aquí se obtiene

$$\begin{cases} \phi = 90^o - \dfrac{z_\odot + z_I}{2} \\ \delta = 90^o + \dfrac{z_\odot - z_I}{2} \end{cases}$$

Una vez que la latitud del lugar es conocida con precisión, bastará realizar observaciones en las culminaciones superiores de estrellas independientemente de que sean circumpolares o no, obteniéndose la declinación mediante

$$\delta = z_{observada} + \phi_{conocida}$$

Por otra parte, cuando la estrella está en el meridiano del lugar, el ángulo horario será cero y por tanto $\alpha_E = \theta_E$.

Si disponemos de un reloj de tiempo sidéreo podremos determinar la hora sidérea en que se realiza el paso de la estrella por el meridiano y, consecuentemente, la ascensión recta de la estrella.

El error del reloj de tiempo sidéreo se calcula realizando observaciones del Sol con dicho círculo meridiano. Si $z_\odot$ es la distancia cenital observada del Sol, entonces

$$\delta_\odot = z_\odot + \phi,$$

y, conociendo el valor de la oblicuidad de la eclíptica, obtendremos la ascensión recta del Sol mediante

$$\operatorname{sen} \alpha_\odot = \tan \delta_\odot \cot \varepsilon.$$

Si se ha tomado la hora sidérea en que se ha realizado la observación, y puesto que $H_\odot = 0^o$, el error del reloj vendrá dado por

$$\Delta\theta = \alpha_\odot - \theta.$$

Así, pues, tendremos

$$\left.\begin{array}{l} \theta_\odot = \alpha_\odot \\ \theta_E = \alpha_E \end{array}\right\} \Rightarrow \theta_E - \theta_\odot = \alpha_E - \alpha_\odot.$$

Por tanto, la ascensión recta fundamental viene dada por

$$\alpha_E = \alpha_\odot + (\theta_E - \theta_\odot) = \theta_E + (\alpha_\odot - \theta_\odot) = \theta_E + \Delta\theta.$$

Determinación de posiciones relativas de astros

Sean (α, δ) las coordenadas conocidas de una estrella E, y (α', δ') las coordenadas que se quieren determinar de otra estrella E' respecto a E.

Si θ y θ' son las horas sidéreas de paso por el meridiano del lugar de ambas estrellas, entonces

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \theta \\ \alpha' = \theta' \end{array}\right\} \Rightarrow \theta' - \theta = \alpha' - \alpha.$$

Por tanto

$$\alpha' = \alpha + (\theta' - \theta) = \theta' + (\alpha - \theta).$$

El término $\alpha - \theta$ representa el error del reloj de tiempo sidéreo.

Si z y z' son las distancias cenitales observadas de las estrellas E y E', entonces

$$\left.\begin{array}{l} \delta = z + \phi \\ \delta' = z' + \phi \end{array}\right\} \Rightarrow \delta - z = \delta' - z',$$

de donde $\delta' = \delta - z + z'$.

Si ambas estrellas están próximas, entonces las coordenadas de la estrella E' pueden obtenerse midiendo la distancia angular s y el ángulo de posición p y aplicando las expresiones diferenciales:

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta\delta = s \cos p \\ \Delta\alpha = s \operatorname{sen} p \sec\delta \end{array}\right.$$

8.7. Problemas

1. Sea P un punto cuya latitud geodésica es ϕ situado sobre el elipsoide terrestre. Demostrar que:

$$\tan(\phi - \varphi') = \frac{e^2 \operatorname{sen} 2\phi}{2(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi)}$$

siendo φ' la latitud geocéntrica de P y e la excentricidad de la elipse meridiana.

2. Se llama ángulo de la vertical γ, al formado por el cenit geodésico y el cenit geocéntrico. Demostrar que el máximo valor de este ángulo viene dado por

$$\gamma = \arctan \frac{a^2 - b^2}{2ab}.$$

3. Determinar para qué valor de la latitud geodésica es máxima su diferencia con la latitud reducida.

4. Demostrar que si observamos un astro desde dos lugares situados sobre un mismo meridiano terrestre se cumple que

$$P = \frac{z_A + z_B - (\phi_A + \phi_B)}{\operatorname{sen} z_A + \operatorname{sen} z_B}$$

siendo z_A y z_B las distancias cenitales topocéntricas y ϕ_A y ϕ_B las latitudes de A y B, respectivamente.

5. Demostrar que si consideramos un modelo elipsódico terrestre entonces la distancia geocéntrica de un astro del Sistema Solar viene dada por

$$d' = \frac{r_A \operatorname{sen} z'_A + r_B \operatorname{sen} z'_B}{z'_A + z'_B - (\varphi'_A + \varphi'_B)},$$

siendo A y B dos lugares de la superficie terrestre situados sobre el mismo meridiano, φ'_A y φ'_B las latitudes geocéntricas de A y B, z'_A y z'_B las distancias cenitales topocéntricas respectivas a las latitudes geocéntricas, y r_A y r_B las distancias geocéntricas de A y B.

6. Demostrar que si se considera un modelo elipsódico terrestre entonces la distancia geocéntrica de un astro del Sistema Solar viene dada por

$$d' = \frac{r_A \operatorname{sen}(z_A - (\varphi_A - \varphi'_A)) + r_B \operatorname{sen}(z_B - (\varphi_B - \varphi'_B))}{z_A + z_B - (\varphi_A + \varphi_B)},$$

siendo A y B dos lugares de la superficie terrestre situados sobre el mismo meridiano, φ_A y φ_B las latitudes geodésicas de A y B, z_A y z_B las distancias cenitales topocéntricas respectivas a las latitudes geodésicas, y r_A y r_B las distancias geocéntricas de A y B.

7. Demostrar que para cualquier astro del Sistema Solar se verifica que

$$\operatorname{sen} S = \frac{\operatorname{sen}(z - P \operatorname{sen} z)}{\operatorname{sen} z} \operatorname{sen} s$$

siendo S, el semidiámetro angular del astro, z, la distancia cenital topocéntrica, P, la paralaje horizontal y s el mayor ángulo bajo el cual se ve desde el lugar de observación el radio del astro.

8. Explicar el proceso de cálculo del semidiámetro aparente topocéntrico de un planeta cualquiera, para un lugar de latitud geodésica ϕ y en el instante de ángulo horario H, sabiendo que se conocen la distancia geocéntrica d_G, las coordenadas ecuatoriales absolutas geocéntricas (α_G, δ_G) y el radio R del planeta. Asimismo, considérese un modelo elipsódico terrestre del cual se conocen el semieje menor b y la excentricidad e de la elipse meridiana.

9. Sean (α,δ) y (α',δ') son las coordenadas geocéntricas y heliocéntricas absolutas de un astro. Demostrar que las diferencias aproximadas entre ambas

coordenadas producidas por la paralaje anua vienen dadas por las expresiones:

$$\left\{\begin{array}{l}\Delta\alpha \,=\, \alpha' - \alpha \,=\, -\,\omega''\, \sec\delta\,(\mathrm{sen}\,\alpha\, \cos\lambda_\odot \,-\, \cos\epsilon\, \cos\alpha\, \mathrm{sen}\,\lambda_\odot) \\ \Delta\delta \,=\, \delta' - \delta \,=\, -\,\omega''\,(\mathrm{sen}\,\epsilon\, \mathrm{sen}\,\lambda_\odot\, \cos\delta \,-\, \mathrm{sen}\,\delta\, \cos\lambda_\odot\, \cos\alpha \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\, \cos\epsilon\, \mathrm{sen}\,\delta\, \mathrm{sen}\,\lambda_\odot\, \mathrm{sen}\,\alpha)\end{array}\right.$$

10. Sean (λ,β) y (λ',β') son las coordenadas geocéntricas y heliocéntricas eclípticas de un astro. Demostrar que las diferencias aproximadas entre ambas coordenadas producidas por la paralaje anua vienen dadas por las expresiones:

$$\left\{\begin{array}{l}\Delta\lambda \,=\, \lambda' - \lambda \,=\, -\,\omega''\, \mathrm{sen}(\lambda_\odot - \lambda)\, \sec\beta \\ \Delta\beta \,=\, \beta' - \beta \,=\, -\,\omega''\, \cos(\lambda_\odot - \lambda)\, \mathrm{sen}\,\beta\end{array}\right.$$

11. Demostrar que:

$$\tan h = \tan h' - P \sec h'$$

siendo h y h' las alturas topocéntrica y geocéntrica, d' la distancia geocéntrica y P la paralaje horizontal del astro.

12. Demostrar que si las correcciones por paralaje anua de una estrella en coordenadas absolutas (α, δ) son extremas entonces se cumple que

$$\tan\delta_\odot \tan\delta = \mathrm{sen}\,\alpha\, \mathrm{sen}\,\alpha_\odot$$

siendo $(\alpha_\odot, \delta_\odot)$ las coordenadas absolutas del Sol y ε la oblicuidad de la eclíptica.

13. Encontrar las épocas del año en que las correcciones por paralaje anual en coordenadas eclípticas son valores extremos.

14. Encontrar los valores máximo y mínimo de la corrección por paralaje anual en coordenadas eclípticas.

15. Demostrar que si una estrella en cierto instante no está afectada por precesión en ascensión recta pero sí en longitud eclíptica, el ángulo Polo Celeste-Estrella-Polo Eclíptico es un ángulo recto.

16. Demostrar que la variación por nutación en longitud viene dada por

$$\left\{\begin{array}{l}d\alpha \,=\, \Delta\psi\,(\cos\varepsilon \,+\, \mathrm{sen}\,\varepsilon\, \mathrm{sen}\,\alpha\, \tan\delta) \\ d\delta \,=\, \Delta\psi\, \mathrm{sen}\,\varepsilon\, \cos\alpha\end{array}\right.$$

17. Demostrar que la variación por nutación en oblicuidad viene dada por

$$\left\{\begin{array}{l}d\alpha \,=\, -\,\Delta\varepsilon\, \cos\alpha\, \tan\delta \\ d\delta \,=\, \Delta\epsilon\, \mathrm{sen}\,\alpha\end{array}\right.$$

18. Una estrella de coordenadas absolutas (α, δ) está situada sobre la eclíptica y tiene una longitud eclíptica λ. Demostrar que los cambios que la precesión lunisolar en ascensión recta, declinación y longitud eclíptica están relacionadas por

$$\cos^2\delta\,\cot\alpha\,\Delta\alpha \,=\, \cot\delta\,\Delta\delta = \,\cot\lambda\,\Delta\lambda.$$

19. Suponiendo que la refracción atmosférica solo afecta, en coordenadas horizontales, a la distancia cenital; demostrar que la variación del ángulo paraláctico Q, del ángulo horario, de la ascensión recta y de la declinación, son respectivamente:

    i) $dQ \,=\, -\,\tan\delta\,\operatorname{sen} Q\,dz.$

    ii) $dH \,=\, -\,d\alpha \,=\, \operatorname{sen} Q\,\sec\delta\,dz.$

    iii) $d\delta \,=\, -\,\cos Q\,dz.$

20. Indicar las posibles posiciones de una estrella situada entre el cenit y el horizonte y cuyo ángulo paraláctico no está afectado por la refracción atmosférica.

21. Demostrar que si la declinación de una estrella no está afectada por refracción en un instante dado, su altura sobre el horizonte viene dada por

$$h \,=\, \operatorname{arc\,sen}\frac{\operatorname{sen}\phi}{\operatorname{sen}\delta}.$$

22. Calcular $\dfrac{dH}{dz}$, donde dH representa la diferencia de ángulo horario entre el paso teórico por el primer vertical al oeste y el paso aparente debido a la refracción; siendo dz la correspondiente corrección en distancia cenital.

23. Dadas dos estrellas que se proyectan muy próximas sobre la esfera celeste y cuyas distancias cenitales verdaderas y observadas son z_1, z_2 y z'_1 y z'_2, respectivamente. Demostrar que si se toma $\rho \,=\, dz \,=\, k\,\tan z$, como fórmula de corrección por refracción entonces se verifican la relación aproximada

$$\Delta z' \,=\, \Delta z\,(1 - k\sec^2 z_1).$$

24. En un observatorio de latitud ϕ la distancia cenital observada de una estrella en su culminación al sur del cenit es z'. ¿Cuál es la declinación de la estrella teniendo en cuenta la refracción?

25. Considerando como fórmula para la refracción $\rho \,=\, K\tan z'$, demostrar que el disco del Sol aparece, debido a la refracción, como una elipse cuyos semiejes mayor y menor son: $a(1 - K)$ y $a(1 - K\sec^2 z')$ respectivamente, donde K se expresa en segundos de arco y z' es la distancia cenital observada del centro del Sol.

26. Sabiendo que la diferencia entre los ángulos horarios de los ocasos teórico y verdadero, esto es afectado por refracción, viene dada por:

$$\Delta H = \frac{34}{15} \sec \phi \sec \delta \operatorname{cosec} H,$$

determinar la época del año en la cual el efecto de la refracción hace que la duración del día en el ecuador terrestre sea máxima.

27. Demostrar, utilizando un modelo vectorial, que si (λ, β) y (λ', β') son las coordenadas eclípticas geocéntricas observadas y reales de una estrella entonces las correcciones por aberración anua son:

$$\begin{cases} \Delta\lambda = \lambda - \lambda' = -20''492 \sec \beta \cos(\lambda_\odot - \lambda) \\ \Delta\beta = \beta - \beta' = -20''492 \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen}(\lambda_\odot - \lambda) \end{cases}$$

donde $\lambda_\odot$ es la longitud eclíptica del Sol.

28. Sean (α, δ) las coordenadas ecuatoriales absolutas de una estrella E tal que $|\delta| > 0$. Demostrar que cuando la corrección por aberración anua en ascensión recta de dicha estrella es extrema, entonces la estrella y el Sol están en el mismo círculo horario.

29. Sea una estrella de coordenadas absolutas α y δ. Suponiendo que las ascensiones rectas del Sol y de la estrella son iguales, demostrar que si la estrella no está afectada por aberración anua en declinación entonces

$$\operatorname{sen} \delta = -\cot \varepsilon \cot \alpha.$$

30. Sea una estrella de coordenadas eclípticas λ y $\beta \neq 0$. Suponiendo que la variación en longitud eclíptica por aberración anua es extrema para dicha estrella, demostrar que $\cos \varepsilon = \tan \alpha_\odot \tan \lambda$.

31. Sea una estrella de coordenadas absolutas α y δ. Suponiendo que la variación en declinación por aberración anua es extrema y que las ascensiones rectas del Sol y de la estrella son iguales, demostrar que $\cot \delta_\odot = \cos \alpha \csc \delta$.

32. Probar que si la aberración anua en declinación de una estrella es máxima entonces $\tan \delta_\odot \cot \delta = \cos(\alpha_\odot - \alpha)$.

33. Demostrar que si las correcciones por aberración anua de una estrella en coordenadas absolutas (α, δ) son extremas entonces

$$\tan \alpha_\odot = \frac{\operatorname{sen} \delta}{\cos^2 \alpha} \cot \varepsilon$$

siendo $(\alpha_\odot, \delta_\odot)$ las coordenadas absolutas del Sol y ε la oblicuidad de la eclíptica.

34. Probar que en las épocas en que se verifica que la corrección por aberración anua en ascensión recta de una estrella es extrema, la estrella y el Sol están en el mismo círculo horario.

35. Encontrar las épocas del año en que las correcciones por aberración anua en coordenadas ecuatoriales absolutas son valores extremos.

36. Probar que si la aberración anua en declinación de una estrella es máxima entonces $\tan\delta_\odot \cot\delta = \cos(\alpha_\odot - \alpha)$.

37. Encontrar, si existe, algún punto de la superficie terrestre donde las estrellas no se vean afectas por el efecto de aberración anua.

38. Sea $\mu = (\mu_\alpha, \mu_\delta)$. Si μ es el movimiento propio de una estrella, y μ_α y μ_δ son los desplazamientos angulares en ascensión recta y declinación, respectivamente, demostrar que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mu_\alpha & = & \mu \operatorname{sen}\sigma \sec\delta \\ \mu_\delta & = & \mu \cos\sigma \end{array} \right.$$

siendo σ el ángulo de posición de la dirección del movimiento propio de la estrella entre el instante inicial t_0 y en el instante t_1.

39. Sean (α, δ) y (α', δ') las coordenadas absolutas de una estrella correspondientes a los instantes t_0 y t y cuyo movimiento propio viene dado por (μ, σ). Demostrar que la variación en ascensión recta y declinación por movimiento propio de la estrella vienen dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \Delta\alpha & = & \mu\,\Delta t \operatorname{sen}\sigma \sec\delta' \\ \Delta\delta & = & \mu\,\Delta t \cos\sigma \end{array} \right.$$

III. Apéndices

A. Trigonometría plana

La Trigonometría Plana tiene por objeto determinar por medio del cálculo el valor de la medida de los elementos desconocidos de un triángulo plano a partir de las medidas de los elementos conocidos, en los mismos casos en que pueden ser construidos. Al decir elementos nos referimos a los lados y a los ángulos, aunque los triángulos también pueden resolverse conociendo elementos secundarios como alturas, bisectrices, medianas, radios del círculo inscrito y circunscrito, etc., convenientemente combinados.

Para ello es preciso establecer ecuaciones de relación entre dichos elementos, surgiendo inmediatamente la primera dificultad, ¿cómo se pueden relacionar magnitudes lineales –lados– y magnitudes adimensionales –ángulos–? Esta cuestión se resuelve mediante las denominadas funciones trigonométricas, las cuales permiten definir los ángulos a partir de medidas lineales.

A continuación se realiza un resumen de los aspectos fundamentales de las funciones trigonométricas y de las relaciones entre ellas.

Funciones trigonométricas de ángulos agudos

Definición A.1 *Sea DAE un ángulo agudo y desde un punto cualquiera B de uno de sus lados trazamos la perpendicular al otro lado. Entonces se obtiene un triángulo rectángulo ABC cuyo ángulo recto es C. Las funciones trigonométricas del ángulo agudo A se definen del siguiente modo:*

$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{c}, \qquad \cos A = \frac{b}{c}, \qquad \tan A = \frac{a}{b},$$
$$\csc A = \frac{c}{a}, \qquad \sec A = \frac{c}{b}, \qquad \cot A = \frac{b}{a}.$$

Proposición A.1 *Las funciones trigonométricas de un ángulo agudo dependen únicamente del valor de este ángulo y no del triángulo rectángulo al que pertenecen.*

Proposición A.2 *Las funciones trigonométricas de un ángulo agudo son iguales a las cofunciones del ángulo complementario.*

Funciones trigonométricas de ángulos cualesquiera

Sea $\{O; X, Y\}$ un sistema de referencia euclídeo bidimensional. Un punto P tiene coordenadas cartesianas (x, y) respecto de este sistema, denominadas abscisa y ordenada, respectivamente. La distancia del punto P al origen O es siempre positiva y tiene como valor $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Definición A.2 *Un ángulo A, formado al partir del eje OX en sentido contrario a las agujas del reloj –sentido directo–, se dice que es* **positivo**, *y* **negativo** *si el ángulo se forma a partir de OX en el sentido de las agujas del reloj –sentido retrógrado–.*

El sistema de referencia establecido divide al plano en cuatro cuadrantes –I, II, III, IV–, que se enumeran partiendo del eje X en sentido directo.

Definición A.3 *Sea A un ángulo determinado por el eje OX y un punto P de coordenadas (x, y) perteneciente a cualquier cuadrante. Entonces sus funciones trigonométricas vienen dadas por:*

$$\operatorname{sen} A = \frac{y}{r}, \qquad \cos A = \frac{x}{r}, \qquad \tan A = \frac{y}{x},$$
$$\csc A = \frac{r}{y}, \qquad \sec A = \frac{r}{x}, \qquad \cot A = \frac{x}{y}.$$

Proposición A.3 *Los signos e intervalos de variación de las funciones trigonométricas en cada cuadrante vienen dados por:*

CUADRANTE	sen A	cos A	tan A	cot A	sec A	csc A
I	+ *0 a 1*	+ *1 a 0*	+ *0 a ∞*	+ *∞ a 0*	+ *1 a ∞*	+ *∞ a 1*
II	+ *1 a 0*	- *0 a -1*	- *-∞ a 0*	- *0 a -∞*	- *-∞ a -1*	+ *1 a ∞*
III	- *0 a -1*	- *-1 a 0*	+ *0 a ∞*	+ *∞ a 0*	- *-1 a -∞*	- *1 a ∞*
IV	- *-1 a 0*	+ *0 a 1*	- *-∞ a 0*	- *0 a -∞*	+ *∞ a 1*	- *-1 a -∞*

Las funciones trigonométricas de ángulos negativos y de ángulos mayores de cuatro rectos pueden determinarse sin más que considerar sus reducciones a ángulos del primer cuadrante:

	$-A$	$\frac{\pi}{2} \pm A$	$\pi \pm A$	$\frac{3\pi}{2} \pm A$	$2k\pi \pm A (k \in N)$
seno	$-\operatorname{sen} A$	$\cos A$	$\mp \operatorname{sen} A$	$-\cos A$	$\pm \operatorname{sen} A$
coseno	$\cos A$	$\mp \operatorname{sen} A$	$-\cos A$	$\pm \operatorname{sen} A$	$\cos A$
tangente	$-\tan A$	$\mp \cot A$	$\pm \tan A$	$\mp \cot A$	$\pm \tan A$
cosecante	$-\csc A$	$\sec A$	$\mp \csc A$	$-\sec A$	$\pm \csc A$
secante	$\sec A$	$\mp \csc A$	$-\sec A$	$\pm \csc A$	$\sec A$
cotangente	$-\cot A$	$\mp \tan A$	$\pm \cot A$	$\mp \tan A$	$\pm \cot A$

siendo A el correspondiente ángulo perteneciente al primer cuadrante.

Representación de las funciones trigonométricas

Definición A.4 *Se denomina circunferencia trigonométrica o goniométrica a la circunferencia de radio unidad que se obtiene al hacer girar la hipotenusa OP de un triángulo rectángulo OMP*

alrededor del extremo O en sentido directo, de tal forma que cada arco de esta circunferencia lleva asociado un ángulo central.

La correspondencia entre ángulo y arco permite definir las las funciones trigonométricas para arcos pertenecientes a la circunferencia trigonométrica.

Definición A.5 *El seno de un arco es la medida del segmento de perpendicular trazado desde el extremo del arco al radio que pasa por el origen de dicho arco.*

El coseno de un arco es la porción de radio comprendida entre el centro del arco y el pie del seno.

La tangente de un arco es la porción de tangente geométrica trazada por el origen de arcos, comprendida entre este origen y la prolongación del radio del extremo del arco.

La cotangente de un arco es la porción de tangente geométrica trazada por el origen de complementos [8] *del arco, comprendida entre este origen y la prolongación del radio del extremo del arco, o también, es la tangente del arco complementario.*

La secante de un arco es el segmento comprendido entre el centro del arco y el extremo de la tangente.

La cosecante de un arco es el segmento comprendido entre el centro del arco y el extremo de la cotangente, o también, es la secante del arco complementario.

Así considerando la circunferencia trigonométrica es posible dar una representación lineal a las funciones trigonométricas. Por este motivo, a las funciones trigonométricas se les llama también líneas trigonométricas. Las definiciones anteriores son válidas para arcos pertenecientes a cualquier cuadrante.

Proposición A.4 *El signo de las líneas trigonométricas viene dado por los siguientes criterios:*

- *Toda línea que sea perpendicular al diámetro que pasa por el origen de arcos, es decir, el seno y la tangente, se considera positiva cuando está en el semiplano superior y negativa cuando está en el semiplano inferior.*

- *Las líneas trigonométricas perpendiculares al diámetro que pasa por el origen de complementos, es decir, el coseno y la cotangente, son positivas cuando están en el semiplano de la derecha y negativas cuando están en el de la izquierda.*

- *La secante y la cosecante se consideran positivas cuando entre sus extremos esté el extremo del arco dado, y negativas en caso contrario.*

La medida de un ángulo puede expresarse respecto a los sistemas sexagesimal y centesimal. El sistema sexagesimal adopta como unidad el grado sexagesimal (1°) completando la circunferencia un total de 360°; cada grado se divide en 60 minutos (') y cada minuto en 60 segundos ("). El sistema centesimal adopta como unidad el grado centesimal (1^g) y en este caso la circunferencia completa un total de 400^g; cada grado se divide en 100 minutos (^{m}) y cada minuto en 100 segundos (^{s}).

[8] Se denomina *origen de complementos* a un punto de la circunferencia trigonométrica tal que el arco con origen en este punto y extremo coincidente con el extremo del arco dado es complementario de dicho arco.

Además de estos dos sistemas se utiliza el sistema circular que permite expresar las funciones trigonométricas como funciones reales de variable real. La unidad de este sistema es el radián que se define del modo siguiente:

Definición A.6 *Un radián es el ángulo subtendido en el centro de una circunferencia por un arco igual al radio de dicha circunferencia.* [9]

Tomando como base el sistema circular, en donde la variable viene dada en radianes, las representaciones de las funciones trigonométricas son:

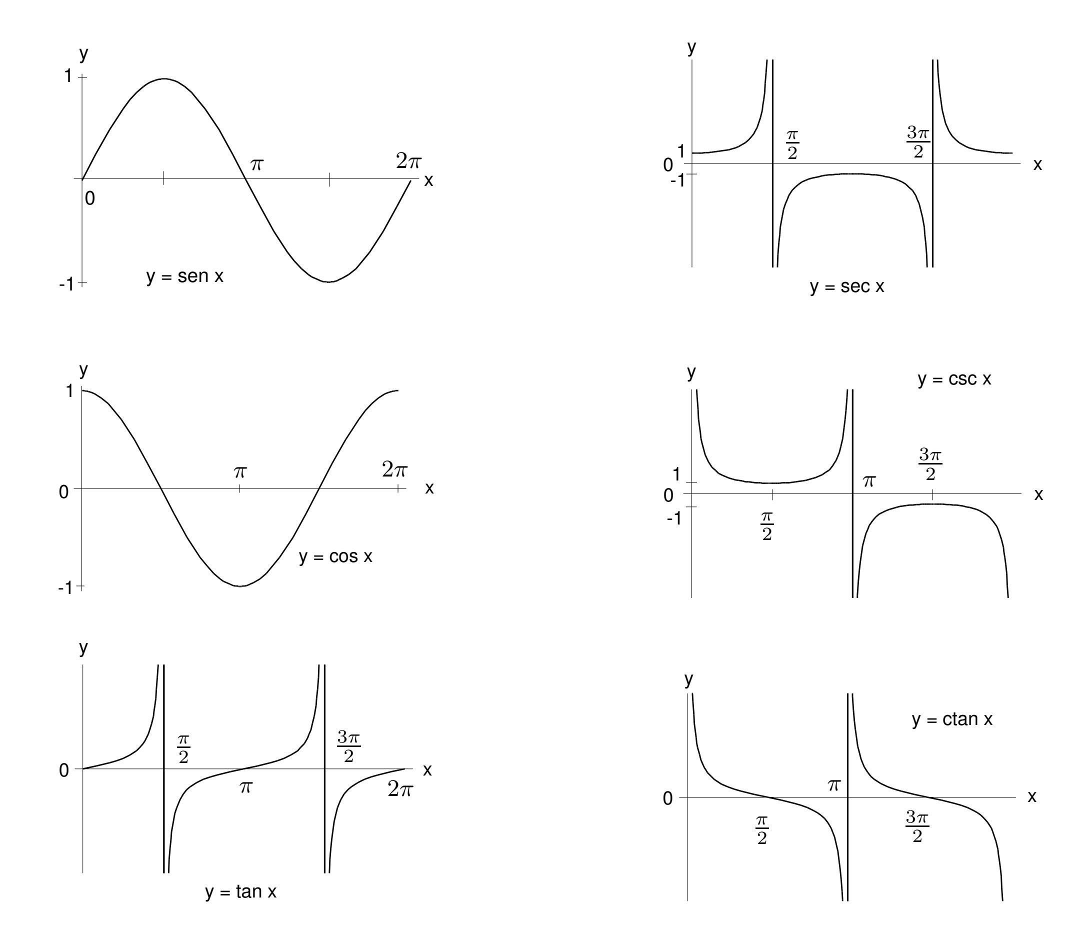


Figura A.40: Funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente.

[9] 1 radián = 180º /π, 1º = π / 180 radianes

Relaciones entre las funciones trigonométricas de un ángulo

Proposición A.5 *La suma de los cuadrados del seno y del coseno de un ángulo es igual a la unidad.*

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Proposición A.6 *La tangente de un ángulo es igual al cociente del seno por el coseno del ángulo.*

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Corolario A.1 *La cotangente, la secante y la cosecante vienen dadas por:*

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}, \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

Proposición A.7 *El cuadrado de la secante de un ángulo menos el cuadrado de su tangente es igual a la unidad.*

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$$

Proposición A.8 *El cuadrado de la cosecante de un ángulo menos el cuadrado de su cotangente es igual a la unidad.*

$$\csc^2 x - \cot^2 x = 1$$

Funciones trigonométricas de sumas y diferencias de ángulos

Proposición A.9 *Las fórmulas de adición y sustracción entre dos ángulos son las siguientes:*

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(A \pm B) &= \operatorname{sen} A \cos B \pm \cos A \operatorname{sen} B \\
\cos(A \pm B) &= \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \\
\tan(A \pm B) &= \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B} \\
\cot(A \pm B) &= \frac{\cot A \cot B \pm 1}{\cot A \pm \cot B}
\end{aligned}$$

Funciones trigonométricas de ángulos múltiplos

Proposición A.10 *Las fórmulas generales de los ángulos múltiplos de un ángulo vienen dadas por:*

$$\operatorname{sen} nA = \operatorname{sen} A \left\{ (2\cos A)^{n-1} - \binom{n-2}{1} (2\cos A)^{n-3} + \binom{n-3}{2} (2\cos A)^{n-5} - \dots \right\}$$

$$\cos nA = \frac{1}{2} \left\{ (2\cos A)^{n} - \frac{n}{1}(2\cos A)^{n-2} + \frac{n}{2} \binom{n-3}{1} (2\cos A)^{n-4} - \frac{n}{3} \binom{n-4}{2} (2\cos A)^{n-6} + \dots \right\}$$

Funciones trigonométricas del ángulo mitad

Proposición A.11 *Las funciones trigonométricas del ángulo mitad vienen dadas por las siguientes expresiones:*

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \qquad \left[\begin{array}{l} +\text{ si A/2 pertenece a los cuadrantes I o II} \\ -\text{ si A/2 pertenece a los cuadrantes III o IV} \end{array}\right]$$

$$\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} \qquad \left[\begin{array}{l} +\text{ si A/2 pertenece a los cuadrantes I o IV} \\ -\text{ si A/2 pertenece a los cuadrantes II o III} \end{array}\right]$$

$$\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} \qquad \left[\begin{array}{l} +\text{ si A/2 pertenece a los cuadrantes I o III} \\ -\text{ si A/2 pertenece a los cuadrantes II o IV} \end{array}\right]$$

Proposición A.12 *Para cualquier valor de un ángulo se verifica:*

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{\operatorname{sen} A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\operatorname{sen} A} = \csc A - \cot A$$

Proposición A.13 *Las funciones trigonométricas de un ángulo en función del ángulo mitad vienen dadas por:*

$$\operatorname{sen} A = 2\operatorname{sen}\frac{A}{2}\,\cos\frac{A}{2}, \qquad \cos A = \cos^2\frac{A}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{A}{2}, \qquad \tan A = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}.$$

Potencias de las funciones trigonométricas

Proposición A.14 *Las fórmulas generales de las potencias de las funciones trigonométricas de un ángulo dado son:*

$$\operatorname{sen}^{2n-1} A = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-2}}\left\{\operatorname{sen}(2n-1)A - \binom{2n-1}{1}\operatorname{sen}(2n-3)A \ldots + (-1)^{n-1}\binom{2n-1}{n-1}\operatorname{sen} A\right\},$$

$$\cos^{2n-1} A = \frac{1}{2^{2n-2}}\left\{\cos(2n-1)A - \binom{2n-1}{1}\cos(2n-3)A + \ldots + \binom{2n-1}{n-1}\cos A\right\},$$

$$\operatorname{sen}^{2n} A = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} + \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\left\{\cos 2nA - \binom{2n}{1}\cos(2n-2)A + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1}\cos 2A\right\},$$

$$\cos^{2n} A = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n-1}}\left\{\cos 2nA + \binom{2n}{1}\cos(2n-2)A + \ldots + \binom{2n}{n-1}\cos 2A\right\}.$$

Transformación de sumas, diferencias y productos de funciones trigonométricas

Proposición A.15 *La suma, la diferencia y el producto de las funciones trigonométricas vienen dadas por:*

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B &= 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B) \, \cos \frac{1}{2}(A-B),\\
\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B &= 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \, \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B),\\
\cos A + \cos B &= 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \, \cos \frac{1}{2}(A-B),\\
\cos A - \cos B &= 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B) \, \operatorname{sen} \frac{1}{2}(B-A),\\
\operatorname{sen} A \, \operatorname{sen} B &= \frac{1}{2} \left\{ \cos(A-B) - \cos(A+B) \right\},\\
\cos A \, \cos B &= \frac{1}{2} \left\{ \cos(A-B) + \cos(A+B) \right\},\\
\operatorname{sen} A \, \cos B &= \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{sen}(A-B) + \operatorname{sen}(A+B) \right\}.
\end{aligned}$$

Funciones circulares inversas

Si $x = \operatorname{sen} y$ entonces $y = \operatorname{arc\,sen} x = \operatorname{sen}^{-1} x$ es una función multiforme de x que puede considerarse como un conjunto de funciones uniformes llamadas ramas. Las demás funciones trigonométricas inversas arco coseno y arco tangente también son multiformes.

Se denomina rama principal a una rama seleccionada para un propósito específico y los valores correspondientes de x se les denominan valores principales.

Proposición A.16 *Los valores principales de las funciones trigonométricas inversas para $x \geq 0$ son los siguientes:*

$$\begin{aligned}
&0 \leq \operatorname{sen}^{-1} x \leq \pi/2, \quad 0 \leq \cos^{-1} x \leq \pi/2, \quad 0 \leq \tan^{-1} x < \pi/2,\\
&0 < \csc^{-1} x \leq \pi/2, \quad 0 \leq \sec^{-1} x < \pi/2, \quad 0 < \cot^{-1} x \leq \pi/2.
\end{aligned}$$

y para valores $x < 0$,

$$\begin{aligned}
&-\pi/2 \leq \operatorname{sen}^{-1} x < 0, \quad \pi/2 < \cos^{-1} x \leq \pi, \quad -\pi/2 < \tan^{-1} x < 0\\
&-\pi/2 \leq \csc^{-1} x < 0, \quad \pi/2 < \cot^{-1} x < \pi, \quad \pi/2 < \sec^{-1} x \leq \pi.
\end{aligned}$$

Proposición A.17 *La relaciones entre las funciones trigonométricas inversas para valores principales vienen dadas por las siguientes expresiones:*

$$\begin{array}{lll}
\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2, & \operatorname{sen}^{-1}(-x) = -\operatorname{sen}^{-1} x, & \tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \pi/2,\\
\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x & \sec^{-1} x + \csc^{-1} x = \pi/2, & \tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x,\\
\csc^{-1} x = \operatorname{sen}^{-1}(1/x), & \cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1} x, & \sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x),\\
\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x, & \cot^{-1} x = \tan^{-1}(1/x), & \csc^{-1}(-x) = -\csc^{-1} x.
\end{array}$$

B. Magnitudes de estrellas

La cantidad de energía luminosa, irradiada por un astro, es una de las características esenciales de éste. Existen dos procedimientos fundamentales para la medición de esta magnitud: mediante la determinación directa de la cantidad de energía luminosa que llega desde el astro hasta el instrumento de medida –fotómetro–, o mediante la comparación de la radiación del astro que se estudia con la radiación de cualquier otro astro, cuya capacidad emisora es conocida.

La potencia de la energía luminosa habitualmente se caracteriza por el flujo de radiación –flujo luminoso–, que es el concepto fundamental de la fotometría. Se denomina *flujo de radiación* a la cantidad de energía luminosa que pasa en la unidad de tiempo a través de una superficie dada; por ejemplo, del orificio de entrada de un telescopio.

El flujo luminoso que incide sobre una superficie de 1 cm^2 se denomina *iluminación* de esta superficie.

Se denomina *luminosidad* de una fuente de radiación a toda la energía que pasa en la unidad de tiempo a través de la superficie cerrada que rodea dicha fuente.

La radiación de la superficie luminosa en una dirección dada se caracteriza por el brillo. Se denomina *brillo* al flujo de radiación que pasa a través de una superficie unitaria perpendicular a la dirección dada y contigua a la superficie irradiante y que está comprendido en el interior de un ángulo sólido unitario en la misma dirección.

El brillo de una fuente luminosa depende, pues, de la superficie de dicha fuente. Para muchos astros, que debido a la distancia a que se encuentran es imposible determinar sus dimensiones angulares, el brillo no podrá determinarse y, únicamente la iluminación que de ellos nos llega será la magnitud que les caracterice.

En Astronomía, la iluminación que procede de un astro se mide en una escala logarítmica denominada *escala de magnitudes estelares*. Como intervalo de 1 magnitud estelar se toma la relación de las iluminaciones igual a 2,512 veces. Este número ha sido elegido por comodidad, de forma que su logaritmo decimal sea exactamente igual a 0,4 y que el intervalo de 5^m corresponda a la relación de 100 veces, y, además, se considera que las estrellas cuya iluminación es menor tienen mayor magnitud estelar. Así pues, la iluminación de los objetos $\ldots, -3^m, -2^m, -1^m, 0^m, +1^m, +2^m, +3^m, \ldots$ forman una progresión geométrica infinitamente decreciente cuya razón exponencial es de 2,512. En esta escala el brillo de una estrella de primera magnitud equivale al brillo de 2,512 estrellas de segunda magnitud, y el de una estrella de segunda magnitud al de 2,512 estrellas de tercera magnitud, y así sucesivamente. Las últimas estrellas que pueden observarse a simple vista corresponden a la sexta magnitud.

Por lo tanto, se denomina *magnitud estelar* de una estrella al logaritmo, tomado con signo negativo, de base 2,512 de la iluminación originada por la estrella en la superficie perpendicular a los rayos que proceden de ella.

De esta definición se deduce que para dos estrellas que originan iluminaciones B_1 y B_2, la diferencia de sus correspondientes magnitudes estelares $m_1 - m_2$ satisface la siguiente expresión, denominada *Ecuación de Pogson*:

$$\frac{B_1}{B_2} = 2{,}512^{-(m_1 - m_2)} \Rightarrow m_1 - m_2 = -\lg_{2{,}512} \frac{B_1}{B_2}.$$

Si aplicamos logaritmos decimales, la ecuación de Pogson puede presentarse de forma simplificada como:

$$m = k - 2{,}5 \lg_{10} B,$$

donde m es la magnitud de una estrella, B es su iluminación y k es una constante, cuyo valor se elige, convencionalmente, asignando la magnitud de una estrella o de un conjunto de ellas, cuyas iluminaciones se han determinado minuciosamente, como origen de la escala de magnitudes estelares.

Puesto que la magnitud estelar caracteriza el flujo luminoso, su definición puede ser ampliada para astros no puntuales. Así, por ejemplo, midiendo las iluminaciones creadas por el Sol, la Luna, por los planetas, etc., se pueden hallar las magnitudes que les corresponden.

En la siguiente tabla se muestran las magnitudes de algunas estrellas y de astros del Sistema Solar.

Astro	Magnitud	Astro	Magnitud	Astro	Magnitud
α–Andromedae	2.15	γ–Cassiopeiae	2.47	β–Persei (Algol)	2.2v
α–Tauri (Aldebarán)	1.06	α–Aurigae (Capella)	0.21	γ–Orionis (Bellatrix)	1.70
β–Orionis (Rigel)	0.34	α–Orionis (Betelgeuse)	0.1v	α–Carinae (Canopus)	-0.86
α–Canis Majoris (Sirio)	-1.58	α–Canis Minoris (Procyon)	0.48	β–Geminorum (Pollux)	1.21
α–Bootis (Arcturus)	0.24	α–Centauri	0.33	α–Lyrae (Vega)	0.14
α–Cygni (Deneb)	1.33	α–Ursae Minoris (Polaris)	2.12v	α–Aquilae (Altair)	0.89
α–Eridani (Archernar)	0.60	α–Geminorum (Castor)	1.99	α–Scorpii (Antares)	1.22
Sol	-26.8	Luna (Plenilunio)	-12.7	Mercurio (Cuadratura)	-0.2
Venus (Cuadratura)	-4.1	Marte (Oposición Media)	-1.9	Júpiter (Oposición Media)	-2.4
Saturno (Oposición Media)	0.8	Urano (Oposición Media)	5.8	Neptuno (Oposición Media)	7.6
Plutón (Oposición Media)	14.7	Io (Oposición Media)	5.5	Europa (Oposición Media)	5.7
Ganímedes (Oposición Media)	5.1	Calixto (Oposición Media)	6.3	Titán (Oposición Media)	8.3

C. Constantes astronómicas

La revisión más reciente del Sistema de Constantes Astronómicas se realizó en 1976 por la Unión Astronómica Internacional (UAI).

Este sistema se ha utilizado en la elaboración de los almanaques astronómicos anuales a partir de 1984.

En la tabla siguiente se muestran las principales constantes astronómicas y los valores adoptados para ellas referidos a la época $J2000{,}0$.

Constante	Valor
Velocidad de la luz	c=2.99792458 $\times$ 10^5 km s^{-1}
Constante gravitacional de Gauss	k=0.01720209895
Constante de gravitación	G=6.672 $\times$ 10^{-11} m^3 $kg^{-1}s^{-2}$
Masa del Sol	$M_\odot$=1.9891$\times$ 10^{30} kg
Constante heliocéntrica gravitatoria	$GM_\odot$=1.32712438 $\times$ 10^{20} m^3 s^{-2}
Unidad Astronómica	1 AU=1.495978700$\times 10^8$ km
Paralaje del Sol	$\pi_\odot$ =8"794148
Radio del Sol	$R_\odot$=6.96 $\times$ 10^5 km
Masa de la Tierra	M_T=5.974 $\times$ 10^{24} kg
Constante geocéntrica gravitatoria	GM_T=3.986005 $\times$ 10^{14} m^3 s^{-2}
Radio ecuatorial terrestre	R_T=6.378140 $\times$ 10^3 km
Factor de aplanamiento terrestre	f=0.00335281=1/298.257
Masa de la Luna	M_L=0.01230002 M_T
Radio de la Luna	R_L=1.738 $\times$ 10^3 km
Oblicuidad de la eclíptica	ε= 23° 26' 21"448
Precesión general anual en longitud	p=50"290966
Precesión anual en ascensión recta	m=3^s0749575
Precesión anual en declinación	n=20"0043109
Constante de nutación	N=9"2025
Constante de aberración	κ=20"49552
Coordenadas absolutas del polo galáctico	$(12^h51^m3, 27^o7')$
Coordenadas absolutas del centro galáctico	$(17^h45^m4, -28^o56')$
Coordenadas absolutas del apex solar	$(18^h8^m, 30^o30')$

D. Características de los astros del Sistema Solar

Planeta	Símbolo	Radio ecuatorial (km)	Aplanamiento	Masa, en masas terrestres	Periodo de rotación axial	Periodo orbital en años julianos	Inclinación del ecuador respecto de la órbita
Mercurio	☿	2439	0	0.055	58^d65	0.24085	0° 01
Venus	♀	6051	0	0.816	243^d01	0.61519	177° 34
Tierra	♁	6378.14	0.00335281	1.000	23^h56^m	1.0000	23° 44
Marte	♂	3393.4	0.0051865	0.107	24^h37^m	1.8807	25° 19
Júpiter	♃	71398	0.0648088	318	$9^h\ 55^m$	11.861	3° 13
Saturno	♄	60000	0.1076209	95.1	10^h39^m	29.570	26° 75
Urano	⛢	25400	0.030	14.6	$15^h\ 34^m$	84.746	97° 86
Neptuno	♆	24300	0.0259	17.2	$18^h\ 26^m$	166.57	29° 55
Plutón	♇	1500	0	0.002	6^d39	249.98	117° 57

Planeta	Semieje Mayor (AU) a	Movimiento medio (°/día) n	Excentricidad e	Inclinación i	Longitud del nodo ascendente Ω	Longitud del perihelio $\overline{\omega}$
Mercurio	0.387099	4.09234	0.205629	7°0059	48°350	77°434
Venus	0.723326	1.60215	0.006772	3°3947	76°723	131°70
Tierra	1.000018	0.985582	0.016773	0°0020	354°9	102°972
Marte	1.523638	0.524061	0.093298	1°8509	49°604	335°942
Júpiter	5.20248	0.0830991	0.048058	1°3047	100°467	15°662
Saturno	9.56329	0.0333315	0.050916	2°4846	113°713	93°444
Urano	19.2937	0.0116303	0.047285	0°7746	74°056	177°048
Neptuno	30.2743	0.00591702	0.006851	1°7693	131°800	357°07
Plutón	39.6823	0.00394283	0.252786	17°1313	110°421	224°499

Planeta	Satélite	Semieje mayor (10^3 km)	Periodo orbital (en días)	Excentricidad de la órbita	Radio del satélite (km)	Masa (1/Planeta)
Tierra	Luna	384.400	27.321661	0.0549	1738	0.01230002
Marte	Phobos	9.378	0.318910	0.015	13.5 × 10.8 × 9.4	1.5×10^{-8}
	Deimos	23.459	1.262441	0.0005	7.5 × 6.1 × 5.5	3×10^{-9}
Júpiter	Io	422	1.769138	0.004	1815	4.68×10^{-5}
	Europa	671	3.551181	0.009	1569	2.52×10^{-5}
	Ganymedes	1070	7.154553	0.002	2631	7.80×10^{-5}
	Callisto	1883	16.689018	0.007	2420	5.66×10^{-5}
	Amalthea	181	0.498179	0.003	135 × 83 × 75	38×10^{-10}
	Himalia	11480	250.5662	0.158	93	50×10^{-10}
	Elara	11737	259.658	0.207	38	4×10^{-10}
	Pasiphae	23500	735	0.378	25	1×10^{-10}
	Sinope	23700	758	0.275	18	0.4×10^{-10}
	Lysithea	11720	259.22	0.107	18	0.4×10^{-10}
	Carme	22600	692	0.2067	20	0.5×10^{-10}
Júpiter	Ananke	21200	631	0.168	15	0.2×10^{-10}
	Leda	11094	238.72	0.14762	8	0.03×10^{-10}
	Thebe	222	0.674	0.015	55 × 45	4×10^{-10}
	Adrastea	129	0.298		12.5 × 10 × 7.5	0.1×10^{-10}
	Metis	128	0.294780		20	0.5×10^{-10}
Saturno	Mimas	185.52	0.942422	0.0196	196	8×10^{-8}
	Enceladus	238.02	1.370218	0.045	250	1.3×10^{-7}
	Tethys	294.66	1.887802	0.000	530	1.3×10^{-6}
	Dione	377.40	2.736914	0.0021	560	1.85×10^{-6}
	Rhea	527.04	4.517500	0.0009	765	4.4×10^{-6}
	Titan	1221.83	15.945420	0.0289	2575	2.38×10^{-4}
	Hyperion	1481.1	21.276608	0.110	205 × 130 × 110	3×10^{-8}
	Iapetus	3561.3	79.330182	0.029	730	3.3×10^{-6}
	Phoebe	12952	550.48	0.166	110	7×10^{-10}
	Janus	151.472	0.694	0.007	110 × 100 × 80	
	Epimetheus	151.422	0.6942	0.009	70 × 60 × 50	
	Helene	377.40	2.736	0.005	18 × 16 × 15	
	Telesto	294.66	1.8878		17 × 14 × 13	
	Calypso	294.66	1.8878		17 × 11 × 11	
	Atlas	137.670	0.6019	0.000	20 × 10	
	Prometheus	139.353	0.6130	0.003	70 × 50 × 40	
	Pandora	141.700	0.6285	0.004	55 × 45 × 35	
	Pan	133.583	0.5750		10	
Urano	Ariel	191.02	2.52038	0.0034	579	1.56×10^{-5}
	Umbriel	266.3	4.14418	0.0050	586	1.35×10^{-5}
	Titania	435.91	8.70588	0.0023	790	4.06×10^{-5}
	Oberon	583.52	13.463238	0.0008	762	3.47×10^{-5}
	Miranda	129.39	1.413479	0.0027	240	0.08×10^{-5}
	Cordelia	49.77	0.335033	<0.001	13	

Urano	Ophelia	53.79	0.376409	0.010	15	
	Bianca	59.17	0.434577	<0.001	21	
	Cressida	61.78	0.463570	<0.001	31	
	Desdemona	62.68	0.473651	<0.001	27	
	Juliet	64.35	0.493066	<0.001	42	
	Portia	66.09	0.513196	<0.001	54	
	Rosalind	69.94	0.558459	<0.001	27	
	Belinda	75.26	0.623525	<0.001	33	
	Puck	86.01	0.761832	<0.001	77	
Neptuno	Triton	354.76	5.87683	0.000016	1353	2.09×10^{-4}
	Nereid	5513.4	360.13619	0.751	170	2×10^{-7}
	Naiad	48.23	0.294396	<0.001	29	
	Thalassa	50.07	0.311485	<0.001	40	
	Despina	52.53	0.334655	<0.001	74	
	Galatea	61.95	0.428745	<0.001	79	
	Larissa	73.55	0.554654	0.0014	104×89	
	Proteus	117.65	1.122315	<0.001	$218 \times 208 \times 201$	
Plutón	Charon	19.6	6.3872	<0.001	593	0.22
Planeta	Satélite	Semieje mayor (10^3 km)	Periodo orbital (en días)	Excentricidad de la órbita	Radio del satélite (km)	Masa (1/Planeta)

E. Glosario

Aberración ... Desplazamiento aparente de la posición observada de un cuerpo celeste, debido, simultáneamente, al carácter finito de la velocidad de la luz, y a los movimientos del observador y del cuerpo observado.

Aberración anua ... Desplazamiento de la posición de los astros debido al efecto combinado de la velocidad de la luz y del movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol.

Aberración diurna ... Desplazamiento de la posición de un astro como consecuencia del movimiento de rotación terrestre y de la velocidad de la luz.

Acimut ... Arco del horizonte celeste medido en sentido retrógrado de 0º y 360º desde el punto sur hasta el vertical que pasa por el punto.

Afelio ... Punto de la órbita terrestre más alejado del Sol.

Almicantarat ... Círculos menores paralelos al horizonte celeste.

Altura ... Arco del vertical que pasa por el punto medido desde el horizonte celeste hasta el punto. La altura de un punto perteneciente al hemisferio visible toma un valor entre 0º y +90º, y entre -90º y 0º si pertenece al hemisferio invisible.

Ángulo de aberración ... Diferencia entre las direcciones real y observada de un astro producida por la aberración anua.

Ángulo de posición entre dos puntos ... Ángulo con vértice en uno de los puntos y comprendido entre su círculo de declinación y el círculo máximo que le une con el otro punto. Se mide de 0º a 360º desde la dirección del polo norte celeste en sentido retrógrado.

Ángulo esférico ... Intersección de la esfera con un diedro cuya arista es uno de sus diámetros.

Ángulo horario ... Arco del ecuador celeste medido en sentido retrógrado de 0º y 360º, o de 0^h a 24^h, desde el punto Q' hasta el meridiano celeste que pasa por el punto.

Ángulo paraláctico ... Ángulo del triángulo de posición de un astro cuyo vértice es el astro y cuyos lados son el meridiano celeste y el vertical que pasa por el astro.

Año-luz ... Distancia recorrida por la luz en un año.

Año anomalístico ... Intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol verdadero por el perigeo de su órbita aparente.

Año ficticio ... Intervalo de tiempo empleado por el Sol medio en dar una vuelta completa al ecuador celeste a partir del punto origen que es la posición en que su ascensión recta, afectada de aberración y contada desde el equinoccio medio de la época, es igual a $18^h 40^m = 280^o$.

Año juliano ... año de 365.25 días solares medios.

Año sidéreo ... Intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol verdadero en su movimiento aparente alrededor de la Tierra por un determinado punto fijo de la eclíptica.

Año trópico ... Intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol por el punto Aries, o equivalentemente, intervalo de tiempo necesario para que la longitud eclíptica media del Sol verdadero aumente 360º.

Apogeo ... Punto de la órbita aparente del Sol más alejado de la Tierra.

Ascensión recta ... Arco del ecuador celeste medido en sentido directo de 0^h a 24^h desde el punto Aries hasta el meridiano celeste que pasa por el punto.

Astronomía de Posición ... Ciencia que estudia la posición y movimiento de los cuerpos materiales del universo en el espacio y en el tiempo, mediante medidas efectuadas en observaciones astronómicas.

Astro circumpolar ... Astro cuya culminación superior para un lugar del hemisferio norte terrestre ocurre entre el polo norte celeste y el cénit y entre el polo sur celeste y el cénit para lugares del hemisferio sur terrestre permaneciendo siempre por encima del horizonte.

Banda zodiacal ... Zona de la esfera celeste de 17º de amplitud limitada por dos paralelos de latitud simétricos respecto de la eclíptica.

Bisectriz de un ángulo esférico ... Semicircunferencia máxima equidistante de sus lados.

Calendario ... Cualquier sistema arbitrario de subdividir una escala temporal para medir convenientemente el tiempo según las necesidades de la vida social.

Calendario gregoriano ... Calendario introducido por el papa Gregorio XIII en 1582, en sustitución del calendario juliano. Difiere de éste en el reparto de los años bisiestos y que al día 4 de octubre de 1582, le sigue el día 15 de octubre de 1582. Los años divisibles por 4 son bisiestos, excepto aquellos en que comienzan los siglos y cuyas dos primeras cifras no son divisibles por 4; suprimiéndose, de este modo, tres bisiestos cada 400 años. La duración media del año gregoriano es de 365.2425 días.

Calendario juliano ... Calendario introducido por Julio César en el año 45 antes de Cristo. Está compuesto de tres años comunes de 365 días, seguidos de un año de 366 días. La duración media del año juliano es de 365.25 días.

Catálogo de estrellas ... Conjunto de sistemas de estrellas fundamentales que contiene sus coordenadas referidas al ecuador y equinoccio medio de una época determinada.

Cénit ... Punto en que la vertical astronómica del lugar interseca a la esfera celeste y, que se corresponde con la dirección opuesta al centro de la Tierra.

Centro galáctico celeste ... Punto de la esfera celeste que resulta de la intersección del ecuador galáctico con la dirección del centro galáctico, o centro de masas de la Galaxia. Para situar este punto se considera el meridiano galáctico que forma un ángulo de 123º con el meridiano galáctico que pasa por el polo norte celeste medido, a partir de este último meridiano galáctico, sobre el ecuador galáctico en sentido retrógrado.

Círculo polar antártico ... Paralelo del hemisferio sur terrestre tal que el valor absoluto de la latitud de sus puntos y la oblicuidad de la eclíptica son complementarias.

Círculo polar ártico ... Paralelo del hemisferio norte terrestre tal que la latitud de sus puntos y la oblicuidad de la eclíptica son complementarias.

Circunferencia máxima ... Intersección de la esfera con un plano que contiene al centro.

Circunferencia menor ... Intersección de la esfera con un plano que no contiene al centro.

Circunferencia tangente a una circunferencia menor ... Circunferencia máxima perpendicular por un punto de la menor al radio esférico que pasa por él, siendo, además, el único punto común entre ambas circunferencias.

Colatitud terrestre ... Ángulo complementario de la latitud terrestre.

Coluro de los equinoccios ... Meridiano celeste que pasa por los equinoccios.

Coluro de los solsticios ... Meridiano celeste que pasa por los solsticios.

Coordenadas absolutas ... Ascensión recta y declinación.

Coordenadas aparentes ... Coordenadas verdaderas de un astro corregidas por paralaje y aberración anual.

Coordenadas cartesianas ... Terna ordenada de números reales que definen la posición de un punto del espacio, respecto a un sistema de referencia euclídeo tridimensional.

Coordenadas eclípticas ... Longitud y latitud eclípticas.

Coordenadas galácticas ... Longitud y latitud galácticas.

Coordenadas geocéntricas ... Coordenadas referidas a un sistema de referencia cuyo origen es el centro de masas de la Tierra, o geocentro.

Coordenadas heliocéntricas ... Coordenadas referidas a un sistema de referencia cuyo origen es el centro dinámico del Sol. Este punto coincide, aproximadamente, con el baricentro del Sistema Solar.

Coordenadas horarias ... Ángulo horario y declinación.

Coordenadas horizontales ... Acimut y altura.

Coordenadas instrumentales ... Coordenadas aparentes de un astro corregidas por paralaje y aberración diurna y por refracción astronómica.

Coordenadas medias ... Coordenadas precisas de un astro corregidas por precesión.

Coordenadas polares ... Terna, definida respecto a un sistema de referencia euclídeo tridimensional, que está formada por el módulo del vector de posición de un punto, y los ángulos determinados por la proyección de dicho vector sobre uno de los planos del sistema con uno de los ejes que definen este plano y con el propio vector de posición, respectivamente.

Coordenadas precisas ... Coordenadas de un astro, referidas a una determinada época de referencia, que se han obtenido mediante observaciones con instrumentos astronómicos de alta precisión. Las coordenadas precisas de una estrella para un instante determinado están corregidas por su movimiento propio.

Coordenadas relativas ... Distancia angular y ángulo de posición.

Coordenadas topocéntricas ... Coordenadas referidas a un sistema de referencia cuyo origen es un punto de la superficie terrestre.

Coordenadas verdaderas ... Coordenadas medias de un astro corregidas por nutación.

Crepúsculo ... Efecto debido a la existencia de la atmósfera por el cual la luz del Sol es

visible aún cuando esté por debajo del horizonte. Se denominan crepúsculos civil, náutico y astronómico a los intervalos de tiempo correspondientes a las alturas del Sol entre 0° y -6°, entre 0° y -12° y entre 0° y -18°, respectivamente. Al crepúsculo posterior al ocaso del Sol se le denomina crepúsculo vespertino y crepúsculo matutino al anterior al orto del Sol.

Culminaciones de un astro ... Cada una de las dos posiciones que ocupa dicho astro a su paso por el meridiano del lugar en su movimiento diurno.

Culminación inferior ... Posición de paso de un astro por el meridiano inferior de un lugar.

Culminación superior ... Posición de paso de un astro por el meridiano superior del lugar.

Declinación ... Arco del meridiano celeste que pasa por el punto medido desde el ecuador celeste hasta el punto. La declinación de un punto perteneciente al hemisferio norte toma un valor entre 0° y $+90^o$, y entre -90° y 0° si pertenece al hemisferio sur.

Defecto esférico ... Diferencia angular entre cuatro rectos y la suma de los lados de un triángulo.

Derrota ... Trayectoria entre dos puntos que une el punto de partida con el punto de llegada.

Derrota loxodrómica ... Derrota que sigue un rumbo constante en todos sus puntos.

Derrota ortodrómica ... Derrota que sigue un arco de circunferencia máxima.

Desviación de la vertical ... Diferencia entre las latitudes geodésicas y astronómicas.

Día sidéreo ... Intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del punto Aries por el meridiano superior del lugar.

Día sidéreo medio ... Intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos por el meridiano superior del lugar del punto Aries corregido por precesión.

Día sidéreo uniforme ... Intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos por el meridiano del lugar del punto Aries dotado de movimiento uniforme.

Día sidéreo verdadero ... Intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos por el meridiano superior del lugar del punto Aries corregido por precesión y nutación.

Día solar ... Intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol por el meridiano superior del lugar de observación.

Día solar medio ... Intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol medio por el meridiano superior del lugar de observación.

Día solar verdadero ... Intervalo de tiempo transcurrido entre dos culminaciones superiores sucesivas del Sol verdadero por el lugar de observación.

Distancia angular entre dos puntos ... Arco del círculo máximo que une ambos puntos de la esfera celeste y cuyos extremos son los propios puntos.

Distancia cenital ... Arco del vertical que pasa por el punto medido de 0° y 180° desde el cénit hasta el punto.

Distancia de un punto a una circunferencia máxima ... Distancia esférica entre el punto y el punto intersección de la circunferencia máxima dada con la circunferencia máxima perpen-

dicular a ella que pasa por el punto.

Distancia esférica entre dos puntos ... Menor de los arcos de la circunferencia máxima obtenida mediante la intersección de la esfera con el plano que contiene al centro de la esfera y a dichos puntos.

Distancia polar ... Arco del meridiano celeste que pasa por el punto medido de 0º y 180º desde el polo norte celeste hasta el punto.

Eclíptica ... Círculo máximo de la esfera celeste que resulta de su intersección con el plano que contiene a la órbita aparente del Sol alrededor de la Tierra.

Ecuación de centro ... Corrección que hay que aplicar a la longitud eclíptica del Sol ficticio para obtener la longitud eclíptica del centro del Sol verdadero.

Ecuación de los equinoccios ... Diferencia entre el tiempo sidéreo verdadero y el tiempo sidéreo medio.

Ecuación de tiempo ... Suma algebraica de todas las correcciones que es necesario aplicar al tiempo verdadero para obtener el tiempo medio.

Ecuador celeste ... Círculo máximo de la esfera celeste que resulta de la intersección de dicha esfera con el plano que contiene al ecuador terrestre.

Ecuador galáctico ... Círculo máximo de la esfera celeste que resulta de la intersección del plano galáctico dicha esfera.

Ecuador terrestre ... Círculo máximo perpendicular al eje terrestre.

Eje celeste ... Prolongación del eje terrestre hasta la esfera celeste.

Eje de la eclíptica ... Perpendicular al plano de la eclíptica que pasa por el centro de la esfera celeste.

Eje galáctico ... Perpendicular al plano galáctico que pasa por el centro de la esfera celeste.

Eje terrestre ... Eje de rotación de la Tierra.

Elipsoide de referencia ... Superficie de referencia de las coordenadas geodésicas angulares de un punto sobre la superficie topográfica terrestre. En la actualidad se utiliza el elipsoide de revolución que contiene el Sistema Geodésico Global WGS-84, y cuyos parámetros geométricos son: $a = 6378{,}775\,Km.$ y $b = 6356{,}752\,Km.$

Equinoccios ... Puntos de la esfera celeste que son extremos de la línea de los equinoccios, y por tanto, diametralmente opuestos.

Era cronológica ... Medida del tiempo, mediante el calendario, a partir de un suceso determinado.

Escala de tiempo ... Ordenación de una determinada serie de sucesos, o cronología, que permite el estudio cuantitativo, o cronometría, de los todos los demás sucesos. La escala de tiempo se establece adoptando un intervalo unidad entre dos posiciones arbitrarias y una posición origen o cero de la escala. Una escala de tiempo también puede construirse definiendo una unidad de tiempo y a partir de ella generar la escala como suma indefinida de dichas unidades de tiempo.

Escala de tiempo rotacional ... Escala astronómica basada en el movimiento de rotación de la Tierra.

Esfera terrestre ... Superficie de referencia de la Tierra en primera aproximación. Se suele considerar como radio de esta esfera $R = 6371\,Km$.

Exceso esférico ... Diferencia angular entre la suma de los ángulos de un triángulo esférico y dos rectos.

Fecha juliana ... Número del día juliano seguido de la fracción decimal de día transcurrida desde el mediodía medio del día precedente hasta el instante considerado.

Geoide ... Superficie equipotencial que coincide con el nivel medio de los mares en reposo, referencia de las altitudes terrestres que se obtienen por nivelación geodésica. Cada punto de la superficie topográfica terrestre pertenece a una única superficie equipotencial y la dirección normal a esta superficie coincide con la línea de la plomada. Las superficies equipotenciales no son paralelas.

Hemisferios celestes ... Cada una de las dos semiesferas en que el ecuador celeste divide a la esfera celeste. Se denominan hemisferio norte y sur celestes a los que contienen, respectivamente, al polo norte y sur celestes.

Hemisferios terrestres ... Cada una de las dos semiesferas en que el ecuador terrestre divide a la Tierra. Se denominan hemisferio norte y sur a los que contienen respectivamente al polo norte y sur terrestres.

Hemisferios visible e invisible ... Cada una de las dos semiesferas en que el horizonte celeste divide a la esfera celeste. El hemisferio visible contiene al cénit y el invisible al nadir.

Hora sidérea ... Ángulo horario del punto Aries.

Horizonte celeste ... Círculo máximo de la esfera celeste que resulta de la intersección de dicha esfera con el plano que contiene al horizonte terrestre.

Horizonte terrestre ... Plano tangente a la Tierra en el lugar de observación.

Huso horario ... Cada una de las 24 partes en que se divide la superficie de la Tierra, de 15°, o 1^h, de amplitud en longitud. Se numeran de 0 a 23 hacia el este a partir del huso que tiene al meridiano de Greenwich como meridiano central.

Huso horario 0 ... Huso horario que tiene al meridiano de Greenwich como meridiano central; extendiéndose entre las longitudes $+7^o5 = 0^h30^mE$ y $-7^o5 = 0^h30^mW$.

Latitud astronómica ... Ángulo formado por la vertical con el ecuador terrestre.

Latitud de un lugar ... Ángulo central que subtiende el arco del meridiano del lugar comprendido entre el ecuador y el lugar. La latitud se mide a partir del ecuador hacia el norte o hacia el sur de 0° a 90°.

Latitud eclíptica ... Arco del máximo de longitud que pasa por el punto medido desde la eclíptica hasta el punto. La latitud eclíptica de un punto varía entre -90° y $+90^o$, tomándose positivo hacia el polo norte eclíptico y negativo hacia el polo sur eclíptico.

Latitud galáctica ... Arco del meridiano galáctico que pasa por el punto medido desde el

ecuador galáctico hasta el punto. La latitud galáctica se mide a partir del ecuador galáctico de 0º a 90º, positivamente hace el polo norte galáctico, y negativamente hacia el polo sur galáctico.

Latitud geocéntrica ... Ángulo formado por el radio vector geocéntrico con el ecuador terrestre.

Latitud geodésica ... Ángulo formado por la normal al elipsoide con el ecuador terrestre.

Latitud reducida ... Ángulo determinado por el radio vector geocéntrico con el ecuador terrestre.

Línea de los equinoccios ... Diámetro determinado por la intersección de la eclíptica y el ecuador celeste.

Línea de los solsticios ... Diámetro de la eclíptica perpendicular a la línea de los equinoccios.

Longitud eclíptica ... Arco de la eclíptica medido en sentido directo de 0º y 360º desde el punto Aries hasta el máximo de longitud que pasa por el punto.

Longitud galáctica ... Arco del ecuador galáctico medido en sentido directo de 0º y 360º desde el centro galáctico celeste hasta el meridiano galáctico que pasa por el punto.

Longitud de un lugar ... Ángulo determinado por el meridiano del lugar y el meridiano que pasa por el Observatorio de Greenwich. La longitud se mide de 0º a 180º hacia el este o hacia el oeste a partir del meridiano de Greenwich.

Lugar de observación ... Lugar situado sobre la superficie terrestre desde el cual se realizan observaciones astronómicas.

Magnitud de una estrella ... Logaritmo, tomado con signo negativo, de base 2.512 de la iluminación originada por la estrella en la superficie perpendicular a los rayos que proceden de ella.

Máximos de longitud ... Círculos máximos que pasan por los polos de la eclíptica.

Máximas digresiones de un astro ... Cada una de las dos posiciones correspondientes en las que el vertical que pasa por ellas es tangente al paralelo descrito por el astro en su movimiento diurno.

Máxima digresión occidental ... Posición de máxima digresión próxima al punto oeste celeste.

Máxima digresión oriental ... Posición de máxima digresión más próxima al punto este celeste.

Mediatriz esférica de un arco ... Circunferencia máxima trazada por el punto medio de dicho arco y que es perpendicular a la circunferencia máxima que contiene al arco.

Medianoche ... Instante en que el Sol está situado sobre el meridiano inferior de un lugar.

Mediodía ... Instante en que el Sol está situado sobre el meridiano superior.

Meridiana ... Diámetro intersección del horizonte celeste con el meridiano del lugar. Sus intersecciones con la esfera celeste son los puntos norte y sur celestes.

Meridiano celeste ... Círculo máximo que pasa los polos celestes.

Meridiano del lugar ... Meridiano celeste que contiene al cénit y al nadir.

Meridiano galáctico ... Círculo máximo de la esfera celeste que pasan por los polos galácticos.

Meridianos superior e inferior ... Cada uno de los dos semimeridianos en que se subdivide el meridiano del lugar. El meridiano superior contiene al cénit y el meridiano inferior al nadir.

Meridiano terrestre ... Circunferencia máxima que pasa los polos terrestres.

Movimiento diurno ... Movimiento de los astros sobre la esfera celeste en círculos paralelos al ecuador celeste en sentido retrógrado, producidos por el movimiento de la Tierra en sentido directo alrededor de su eje de rotación.

Movimiento propio ... Desplazamiento angular de una estrella por unidad de tiempo que resulta del desplazamiento relativo de dicha estrella con respecto al Sol y de su movimiento particular en el universo.

Nadir ... Punto en que la vertical astronómica del lugar interseca a la esfera celeste y, que se corresponde con la dirección que pasa por el centro de la Tierra.

Noche y día ... Intervalos de tiempo transcurridos entre el ocaso y el orto, y entre el orto y el ocaso del Sol, respectivamente.

Nutación ... Movimiento de corto período debido a la atracción conjunta del Sol, de la Luna y de los planetas del Sistema Solar sobre el abultamiento ecuatorial terrestre. Produce variaciones en la oblicuidad de la eclíptica. Este movimiento tiene un período de 18.66 años haciendo que el polo celeste describa una elipse en sentido retrógrado, cuyo centro es el que recorre el círculo de precesión alrededor del eje de la eclíptica.

Oblicuidad de la eclíptica ... Ángulo que forman la eclíptica y el ecuador celeste, o ángulo existente entre el eje celeste y el eje de la eclíptica. Si consideramos el meridiano que pasa por el polo norte de la eclíptica, podemos definir la oblicuidad de la eclíptica como el arco de dicho meridiano entre los polos norte celeste y eclíptico, o también como la distancia polar del polo norte de la eclíptica. Su valor aproximado es $23^{o}\,27'$.

Ocaso ... Posición correspondiente de un astro más próxima al punto oeste celeste, que se obtiene como la intersección del paralelo descrito en su movimiento diurno con el horizonte del lugar.

Ondulación del geoide ... Diferencia entre las altitudes elipsódicas y ortométricas.

Origen de longitudes ... Meridiano que pasa por el Observatorio Real de Greenwich.

Orto ... Posición correspondiente de un astro más próxima al punto este celeste, que se obtiene como la intersección del paralelo descrito en su movimiento diurno con el horizonte del lugar.

Paralaje ... Efecto geométrico que expresa la variación de la dirección de un astro cuando se efectúa un cambio del origen del sistema de coordenadas de un punto a otro del espacio.

Paralaje anua ... Variación de la dirección de un astro que se produce cuando se efectúa un cambio entre orígenes geocéntrico y heliocéntrico; es el mayor ángulo subtendido por la distancia entre el Sol y la Tierra, es decir, el mayor ángulo bajo el cual se ve la distancia entre el Sol y la Tierra desde un astro.

Paralaje diurna ... Variación de la dirección de un astro que se produce cuando se realiza un cambio entre orígenes topocéntrico y geocéntrico; es el ángulo bajo el cual se ve el radio terrestre desde el astro en un instante determinado.

Paralaje horizontal ... Paralaje diurna de un astro cuando está situado en el horizonte.

Paralaje horizontal ecuatorial ... Máximo valor de la paralaje diurna cuando el astro está en el horizonte, para observadores situados sobre el ecuador terrestre y en el modelo elipsódico terrestre.

Paralelo celeste ... Círculo menor paralelo al ecuador celeste.

Paralelo de latitud ... Círculo menor paralelo a la eclíptica.

Paralelo galáctico ... Círculo menor de la esfera celeste paralelo al ecuador galáctico.

Paralelo terrestre ... Círculo menor paralelo al ecuador terrestre.

Parsec ... Distancia a que debe estar un astro para que su paralaje anua valga 1".

Paso por el primer vertical ... Posiciones correspondientes de un astro que se obtienen como intersección del paralelo descrito por el astro en su movimiento diurno con el primer vertical. Se denominan posiciones de paso por el primer vertical este y oeste.

Perigeo ... Punto de la órbita aparente del Sol más próximo a la Tierra.

Perihelio ... Punto de la órbita terrestre más próximo al Sol.

Periodo juliano ... Escala continua de tiempo propuesta por José Scaliger en 1582. En ella se cuentan, ininterrumpidamente, los días solares medios a partir del mediodía medio en Greenwich del 0 de enero del año 4713 antes de Cristo.

Perpendicular ... Diámetro intersección del horizonte y ecuador celestes. Sus intersecciones con la esfera celeste son los puntos este y oeste celestes.

Perpendículo ... Arco de circunferencia máxima que pasa por el vértice de un triángulo esférico y es perpendicular al lado opuesto.

Plano galáctico ... Plano de simetría de la Galaxia.

Polos celestes ... Cada uno de los puntos en que el eje terrestre interseca a la esfera celeste. El polo norte celeste corresponde a la prolongación del eje terrestre en la dirección del polo norte terrestre, y el polo sur celeste a la del polo sur terrestre.

Polos de la eclíptica ... Puntos intersección del eje de la eclíptica con la esfera celeste. El polo norte de la eclíptica es el más próximo al polo norte celeste y el polo sur de la eclíptica es el más próximo al polo sur celeste.

Polos de una circunferencia máxima ... Puntos de la esfera que equidistan de todos los puntos de dicha circunferencia máxima, o equivalentemente, los extremos del diámetro perpendicular a dicha circunferencia máxima.

Polos de una circunferencia menor ... Extremos del diámetro perpendicular al plano que la contiene. El polo que está situado a una distancia esférica menor se denomina centro.

Polos galácticos ... Puntos de la esfera celeste que resultan de la intersección del eje galáctico

con la esfera celeste. El polo norte galáctico es el que está más próximo al polo norte celeste, y el polo sur galáctico el más próximo al polo sur celeste. Las coordenadas absolutas del polo norte galáctico son $(12^h 49^m, +27^o 24'0)$.

Polos terrestres ... Cada uno de los puntos en que el eje terrestre interseca a la superficie terrestre. Se denomina polo norte o boreal al situado en el océano ártico y polo sur o austral al situado en el continente antártico.

Posiciones absolutas ... Coordenadas determinadas directamente sin presuponer el conocimiento previo de las posiciones de otros astro.

Posiciones correspondientes ... Posiciones simétricas de un astro respecto del meridiano del lugar.

Posiciones relativas ... Coordenadas determinadas a partir de coordenadas conocidas a priori de otros astros.

Precesión general ... Efecto producido por el conjunto de las atracciones del Sol, de la Luna y de los planetas del Sistema Solar sobre el abultamiento ecuatorial de la Tierra.

Precesión lunisolar ... Efecto de la atracción conjunta del Sol y la Luna sobre el abultamiento ecuatorial terrestre. La precesión lunisolar produce un movimiento del ecuador terrestre de carácter secular que arrastra al eje de rotación y, consecuentemente, el eje celeste describe un cono alrededor del eje de la eclíptica en sentido retrógrado con período de 26000 años. Debido a este fenómeno, el punto Aries tiene un movimiento retrógrado sobre la eclíptica de 50"2909 por año.

Precesión planetaria ... Efecto de la atracción de los planetas sobre el abultamiento ecuatorial terrestre. Este fenómeno afecta al plano de la eclíptica de forma que en cada instante variará la posición de la eclíptica sobre la esfera celeste.

Primer máximo de longitud ... Máximo de longitud que pasa por los equinoccios.

Primer vertical ... Vertical que pasa por los puntos este y oeste.

Punto Aries, punto vernal o equinoccio de primavera ... Equinoccio en el cual el Sol pasa del hemisferio sur celeste al hemisferio norte celeste. En este punto la declinación del Sol es nula pero en instantes anteriores es negativa e instantes posteriores es positiva.

Punto Cáncer o solsticio de verano ... Solsticio situado en el hemisferio norte celeste. En este punto la declinación del Sol y la oblicuidad de la eclíptica son iguales, y consecuentemente máximas.

Punto Capricornio o solsticio de invierno ... Solsticio situado en el hemisferio sur celeste. La declinación del Sol es mínima y opuesta a lo oblicuidad de la eclíptica.

Puntos cardinales ... Direcciones norte-sur, y este-oeste del horizonte terrestre perpendiculares entre sí. Las direcciones norte y sur quedan determinadas por la recta tangente al meridiano terrestre que pasa por el lugar de observación. La semirrecta tangente que está dirigida hacia el polo norte terrestre determina la dirección norte y la semirrecta tangente opuesta, la dirección sur. La dirección este se define como la semirrecta del horizonte, perpendicular a la dirección norte-sur, y situada a 90º de la dirección norte en sentido retrógrado. La dirección oeste es la

dirección opuesta a la dirección este.

Punto Libra, punto autumnal o equinoccio de otoño ... Extremo de la línea de los equinoccios opuesto al punto Aries. En él, el Sol pasa del hemisferio norte celeste al hemisferio sur celeste. Al igual que en el punto Aries su declinación nula pero pasando de declinaciones positivas a negativas.

Puntos norte, sur, este y oeste celestes ... Puntos del horizonte celeste que se obtienen como intersección de la esfera celeste con las direcciones que definen los puntos cardinales.

Punto Q' ... Punto que resulta de la intersección del meridiano superior con el ecuador celeste.

Reducción al ecuador ... Corrección que hay que aplicar a la longitud eclíptica del Sol verdadero para obtener la ascensión recta del Sol verdadero.

Reducción de posiciones ... Proceso encaminado a la obtención de coordenadas aparentes de astros para un instante determinado a partir de sus coordenadas precisas referidas a una determinada época de referencia.

Refracción astronómica ... Ángulo existente entre la dirección con que llega la luz procedente de un astro a la capa más externa de la atmósfera y la dirección con que finalmente llega al lugar de observación.

Reloj ... Cualquier sistema físico que permite determinar el valor numérico de la variable tiempo correspondiente a un estado del sistema.

Rumbo geográfico ... Ángulo que forma el meridiano que pasa por un punto de una ruta con dicha ruta. Se mide de 0º a 360º a partir del arco de meridiano que une el punto con el polo norte. Habitualmente, se define rumbo entre dos puntos como el ángulo que forma el meridiano del origen con la ruta establecida.

Semidiámetro angular ... Ángulo subtendido desde el centro de la Tierra por el radio del astro.

Semiperímetro ... Semisuma angular de los lados de un triángulo esférico.

Segundo atómico ... Duración de 9192631770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133.

Segundo de efemérides ... Fracción 1/31556925,97474 del año trópico 1900.

Sistema absoluto ... Sistema de coordenadas astronómico cuyo origen de coordenadas es el centro de masas de la Tierra; el plano fundamental es el plano que contiene al ecuador terrestre y por tanto, el círculo máximo fundamental, el eje fundamental, los polos y los círculos secundarios son, respectivamente, el ecuador celeste, el eje celeste, los polos norte y sur celeste y los meridianos celestes; el punto fundamental es el punto Aries y los ángulos o arcos correspondientes sobre el ecuador celeste se miden en sentido directo a partir del punto Aries.

Sistema astronómico ... Sistema de coordenadas determinado por un punto arbitrario que se toma como centro de la esfera celeste y que se denomina origen de coordenadas, un plano fundamental que pasa por el centro de la esfera celeste, de forma que su intersección con ella constituye el círculo máximo fundamental y que determina los polos del mismo, los cuales posibilitan la definición de los círculos máximos secundarios, por un punto arbitrario del círculo

máximo fundamental que se denomina punto fundamental del sistema y, por un sentido de medida de ángulos sobre el plano fundamental.

Sistema eclíptico ... Sistema de coordenadas astronómico cuyo origen de coordenadas es el centro de masas de la Tierra, el plano fundamental es el plano de la eclíptica y el círculo máximo fundamental, el eje fundamental, los polos y los círculos secundarios son, respectivamente, la eclíptica, el eje de la eclíptica, los polos norte y sur eclípticos y los máximos de longitud; el punto fundamental es el punto Aries y los ángulos o arcos correspondientes sobre la eclíptica se miden en sentido directo a partir del punto Aries.

Sistema fundamental ... Conjunto de estrellas convenientemente distribuidas sobre la esfera celeste que están dotadas de posiciones fundamentales.

Sistema galáctico ... Sistema de coordenadas astronómico cuyo origen de coordenadas es el centro de masas de la Tierra, el plano fundamental es el plano galáctico y el círculo máximo fundamental, el eje fundamental, los polos y los círculos secundarios son, respectivamente, el ecuador galáctico, el eje galáctico, los polos galácticos y los meridianos galácticos; el punto fundamental es el centro galáctico celeste y los ángulos o arcos correspondientes sobre el ecuador galáctico se miden en sentido directo a partir del centro galáctico celeste.

Sistema horario ... Sistema de coordenadas astronómico cuyo origen de coordenadas es el centro de masas de la Tierra, el plano fundamental es el plano que contiene al ecuador terrestre, y el círculo máximo fundamental, el eje fundamental, los polos y los círculos secundarios son, respectivamente, el ecuador celeste, el eje celeste, los polos norte y sur celeste y los meridianos celestes; el punto fundamental es el punto Q' y los ángulos o arcos correspondientes sobre el ecuador celeste se miden en sentido retrógrado a partir del punto Q'.

Sistema horizontal ... Sistema de coordenadas astronómico cuyo origen de coordenadas es el lugar de observación situado sobre la superficie terrestre; el plano fundamental es el horizonte del lugar, y, por tanto, el círculo máximo fundamental, el eje fundamental, los polos y los círculos secundarios son, respectivamente, el horizonte celeste, la vertical astronómica del lugar, el cénit y el nadir y los verticales celestes; el punto fundamental es el punto sur celeste y los ángulos o arcos correspondientes sobre el horizonte celeste se miden en sentido retrógrado a partir del punto sur celeste.

Sol ficticio ... Sol que se mueve sobre la eclíptica con velocidad constante y coincidente con el Sol verdadero en el perigeo y en el apogeo.

Sol medio ... Sol que se mueve sobre el ecuador celeste con movimiento uniforme, coincidiendo con el Sol ficticio en los equinoccios y que, además, su ascensión recta es igual a la longitud eclíptica del Sol ficticio.

Sol verdadero ... Sol que se mueve por la eclíptica con movimiento no uniforme.

Solsticios ... Puntos de la esfera celeste extremos de la línea de los solsticios.

Superficie topográfica ... Superficie física real de la Tierra.

Tiempo ... Variable que describe los cambios que experimentan las coordenadas espaciales de los astros, estando, pues, íntimamente relacionado con el concepto de movimiento.

Tiempo atómico ... Escala de tiempo definida por patrones atómicos de frecuencia, que per-

miten determinar y reproducir un intervalo de tiempo con grandes precisiones.

Tiempo atómico local ... Escala de tiempo atómico obtenida mediante la integración numérica de la frecuencia de cada patrón o reloj atómico.

Tiempo atómico internacional ... Escala de tiempo atómico que se obtiene como la media ponderada de todos los relojes atómicos que contribuyen a su definición.

Tiempo civil ... Escala de tiempo medio desplazada del tiempo medio en doce horas.

Tiempo de efemérides ... Escala de tiempo definida por la variable independiente t que interviene en la ecuación que proporciona la longitud eclíptica media del Sol y que se obtiene mediante la resolución del modelo dinámico del movimiento del Sol.

Tiempo dinámico baricéntrico ... Escala de tiempo de efemérides referida al baricentro del Sistema Solar.

Tiempo dinámico terrestre ... Escala de tiempo tal cuya unidad coincide con el segundo de tiempo atómico reducido al geoide y a un sistema geocéntrico, eliminándose las variaciones del campo gravitatorio y de la rotación terrestre.

Tiempo oficial ...de un lugar: escala de tiempo que definido como el tiempo civil del meridiano central del huso horario al que pertenece.

Tiempo sidéreo ... Escala de tiempo definida por la variación en ángulo horario del punto Aries respecto al meridiano local.

Tiempo sidéreo medio ... Escala de tiempo definida por la variación en ángulo horario del punto Aries, corregido por precesión, respecto al meridiano local.

Tiempo sidéreo verdadero ... Escala de tiempo definida por el ángulo horario del punto Aries, corregido por precesión y nutación, respecto al meridiano local.

Tiempo solar medio ... Escala de tiempo uniforme definida por el ángulo horario del Sol medio.

Tiempo solar verdadero ... Escala de tiempo definida por el ángulo horario del centro del Sol verdadero.

Tiempo universal ... Escala de tiempo definida por el tiempo civil de Greenwich. El tiempo universal no es exactamente uniforme debido a las variaciones seculares de la precesión y a que la rotación de la Tierra no es constante.

Tiempo universal 0 ... Tiempo universal determinado en un observatorio a partir del tiempo sidéreo obtenido mediante observaciones de estrellas fundamentales, generalmente a su paso por el meridiano.

Tiempo universal 1 ... TU0 corregido por el movimiento del polo.

Tiempo universal 2 ... TU1 corregido de las irregularidades periódicas del movimiento de rotación terrestre.

Tiempo universal 2 Definitivo ... Tiempo universal obtenido como promedio del tiempo universal TU2 hallado por todos los observatorios que contribuyen a su determinación.

Tiempo universal coordinado ... Escala de tiempo adoptada para las emisiones horarias. Proporciona al usuario el tiempo universal TU1.

Triángulo esférico ... Superficie esférica obtenida mediante la intersección de la esfera y de un triedro cuyo vértice es el centro de dicha esfera. Las intersecciones de las aristas del triedro con la esfera son los vértices del triángulo esférico, y puesto que a todo ángulo central le corresponde una distancia esférica sobre la superficie de la esfera y a cada diedro un ángulo esférico, entonces las caras del triedro serán los arcos de circunferencias máximas y a los diedros del triedro les corresponderán los ángulos del triángulo esférico.

Triángulo esférico equilátero ... Triángulo esférico que tiene iguales los tres lados.

Triángulo esférico isósceles ... Triángulo esférico que tiene dos lados iguales.

Triángulo esférico oblicuángulo ... Triángulo esférico que no tiene ningún ángulo recto.

Triángulos esféricos polares... Intersección de una esfera con dos triedros polares de vértice en su centro. Los vértices de cada uno de ellos son polos de las circunferencias máximas a las cuales pertenecen los lados del otro.

Triángulo esférico rectángulo ... Triángulo esférico que tiene un ángulo recto. Si tiene dos ángulos rectos, entonces es birrectángulo; y si tiene los tres, trirrectángulo.

Triángulo esférico rectilátero ... Triángulo esférico que tiene un lado recto.

Triedro ... Figura convexa generada por tres semirrectas con un origen común. Está formado por el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que son comunes a los semiespacios limitados por los planos determinados por cada par de semirrectas y que contienen a la semirrecta restante.

Triedros polares ... Triedros que tienen el mismo vértice y tales que los diedros de uno son suplementarios de las caras del otro y, recíprocamente, los diedros de éste son suplementarios de las caras del primero.

Trigonometría esférica ... Ciencia que trata de las relaciones trigonométricas que existen entre los seis elementos, tres lados y tres ángulos, de un triángulo esférico, o, lo que es lo mismo, entre las caras y los diedros del triedro que define dicho triángulo esférico.

Trópico de Cáncer ... Paralelo terrestre tal que la latitud de sus puntos es igual a la oblicuidad de la eclíptica.

Trópico de Capricornio ... Paralelo terrestre tal que la latitud de sus puntos es igual a menos la oblicuidad de la eclíptica.

Unidad astronómica ... Distancia media existente entre el Sol y la Tierra y es igual a 149597870 Kms.

Vertical astronómica ... Prolongación de la vertical del lugar hasta la esfera celeste.

Vertical celeste ... Círculos máximos que pasan por el cénit y el nadir.

Vertical del lugar ... Dirección perpendicular al horizonte por el lugar de observación. Esta dirección representa la dirección de la fuerza de la gravedad y que se materializa por la dirección determinada por la línea de la plomada.

IV. Bibliografía

1. – (1969). *Problemas de Astronomía*, Dpto. de Física de la Tierra y del Cosmos, Cátedra de Astronomía, Universidad de Barcelona, Barcelona.
2. – (1998). *Efemérides Astronómicas*, Sección de Astronomía, Real Instituto y Observatorio de la Armada, San Fernando.
3. Bakulin, P.I., Kononovich, E.V. y Moroz V.I. (1989). *Curso de Astronomía General*, T. G. Valladares, Perú.
4. Danjon, A. (1959). *Astronomie Général*, Ed. Sennac, París.
5. Docobo, J.A. y Elipe, A. (1983). *Astronomía. 280 problemas resueltos*, Universidad de Santiago, Santiago de Compostela.
6. Fossi, I. (1943). *Trigonometría Rectilínea y Esférica*, Ed. DOSSAT, Madrid.
7. Granville, W., Smith, P. y Mikesh, J. (1990). *Trigonometría Plana y Esférica*, Unión Tipográfica Editorial, México.
8. Green, R.M. (1993). *Spherical Astronomy*, Cambridge University Press.
9. McNally, D. (1974). *Positional Astronomy*, University of London, Londres.
10. Nieto, J.M. (1996). *Curso de Trigonometría Esférica*, Servicio de Publicaciones, Universidad de Cádiz.
11. Orús, J.J. y Catalá, M.A. (1987). *Apuntes de Astronomía*, Tomo I, Dpto. de Física de la Atmósfera, Astronomía y Astrofísica, Universidad de Barcelona, Barcelona.
12. Puig Adam, P. (1969). *Curso de Geometría Métrica. Tomo I: Fundamentos y Tomo II: Trigonometría, Métrica Proyectiva y Cónicas*, 9ª edición, Biblioteca Matemática, Madrid.
13. Rodríguez, M.G. y Gil A.J. (1993). *Problemas de Astronomía*, Ed. Complutense, Madrid.
14. Roy A.E. y Clarke, D. (1994). *Astronomy. Principles and Practice*, 3ª edición, Institute of Physics Publishing, Philadelphia (PA).
15. Seidelman, P.K. (Editor) (1992). *Explanatory supplement to the astronomical almanac*, University Science Books, Mill Valley (CA).
16. Smart, W.M. (1997). *Textbook on Spherical Astronomy*, 6ª edición, Cambridge University Press.
17. Taff, L.G. (1981). *Computational Spherical Astronomy*, Wiley–Interscience Publication, New York.
18. Vives, T.J. (1971). *Astronomía de Posición: Espacio y Tiempo*, Ed. Alhambra, Madrid.

19. Vorontsov–Veliaminov, B.A. (1979). *Problemas y ejercicios prácticos de Astronomía*, Ed. Universitaria de Colima, México.

20. Woolard, E.W. y Clemence, G.M. (1966). *Spherical Astronomy*, Academic Press, New York.